

Ano lectivo

2013-2014

TEXTO DE APOIO À DISCIPLINA DE ELEMENTOS DE
ASTRONOMIA

Princípios de Astronomia Esférica

APONTAMENTOS DE APOIO À DISCIPLINA DE

Elementos de Astronomia

6ª Versão: 25 de Setembro de 2013

5ª Versão: 1 de Outubro de 2012

4ª Versão: 14 de Setembro de 2011

3ª Versão: 27 de Setembro de 2010

2ª Versão: 8 de Setembro de 2009

1ª Versão: 30 de Abril de 2008

© João Fernandes
Departamento de Matemática
jmfernan@mat.uc.pt
www.mat.uc.pt/~jmfernan

Índice

<u>INTRODUÇÃO E BREVE RESENHA HISTÓRICA.....</u>	6
ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE ESTAS NOTAS	21
<u>CAPÍTULO 1. TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.....</u>	23
1.1 A ESFERA.....	23
1.2 TRIÂNGULO ESFÉRICO	25
1.3 FÓRMULAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	26
1.3.1 SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS	26
1.3.2 FÓRMULA FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.....	27
1.3.3 FÓRMULA DA ANALOGIA DOS SENOS.....	28
1.3.4 FÓRMULA DOS CINCO ELEMENTOS	30
1.3.5 FÓRMULA DOS QUATRO ELEMENTOS CONSECUTIVOS	31
1.3.6 DISCUSSÃO.....	32
1.3.7 NAVEGAÇÃO ORTODRÓMICA: APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	33
<u>CAPÍTULO 2. SISTEMAS DE COORDENADAS CELESTES.....</u>	35
2.1 SISTEMA DE COORDENADAS HORIZONTAIS LOCAIS.....	35
2.2 SISTEMA DE COORDENADAS EQUATORIAIS HORÁRIAS	37
2.3 SISTEMA DE COORDENADAS EQUATORIAIS URANOGRÁFICAS (OU CELESTES)	38
2.4 SISTEMA DE COORDENADAS ECLÍPTICAS	39
2.5 MÉTODOS DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE SISTEMAS	41
2.5.1 TRANSFORMAÇÕES ENTRE OS SISTEMAS HORIZONTAL LOCAL E EQUATORIAL HORÁRIO: (A, h) \rightarrow (H, δ).....	41
2.5.2 TRANSFORMAÇÕES ENTRE OS SISTEMAS URANOGRÁFICO E ECLÍPTICO: (α , δ) \rightarrow (λ , β)... ..	43
<u>CAPÍTULO 3. MOVIMENTO DIURNO DOS ASTROS</u>	45
3.1 DURAÇÃO DA VISIBILIDADE DE UM ASTRO OU O INTERVALO DE TEMPO PASSADO ACIMA DO HORIZONTE	45
3.2 ASTROS CIRCUMPOLARES	48
3.3 PASSAGEM MERIDIANA OU CULMINAÇÃO.....	48

3.3 PASSAGEM NO PRIMEIRO VERTICAL	49
3.4 MAIOR DIGRESSÃO DE UM ASTRO	49

CAPÍTULO 4. ALGUMAS PROPRIEDADES DO MOVIMENTO APARENTE DAS ESTRELAS: MOVIMENTO ANUAL E SECULAR. MOVIMENTO PRÓPRIO DAS ESTRELAS. 52

4.1 DESLOCAMENTO APARENTE DA ESTRELA NA ESFERA CELESTE.....	52
4.2 PARALAXE ESTELAR E ABERRAÇÃO ANUAL	55
4.2.1 PARALAXE ANUAL OU ESTELAR	55
4.2.2 EFEITO DA PARALAXE ANUAL SOBRE AS COORDENADAS DE UMA ESTRELA.	58
4.2.2 ABERRAÇÃO DIURNA	59
4.2.3 EFEITO DA ABERRAÇÃO ANUAL SOBRE AS COORDENADAS DE UMA ESTRELA.....	60
4.3 MOVIMENTOS SECULARES: PRECESSÃO E NUTAÇÃO.....	61
4.3.1 PRECESSÃO LUNI-SOLAR.....	61
4.3.2 EFEITO DA PRECESSÃO LUNI-SOLAR SOBRE AS COORDENADAS DE UMA ESTRELA	64
4.3.3 PRECESSÃO PLANETÁRIA	65
4.3.4 NUTAÇÃO	67
4.4 MOVIMENTO PRÓPRIO DAS ESTRELAS	69

CAPÍTULO 5. OS SISTEMAS DE TEMPO..... 73

5.1 TEMPO SIDERAL (APARENTE LOCAL)	73
5.2 TEMPO SIDERAL MÉDIO	74
5.2.1 EQUAÇÃO DO EQUINÓCIOS	74
5.3 TEMPO SOLAR	75
5.4 TEMPO SOLAR MÉDIO. TEMPO UNIVERSAL.....	77
5.4.1 EQUAÇÃO DO TEMPO.....	77
5.5 RELAÇÃO ENTRE OS TEMPOS MÉDIOS: SIDERAL E SOLAR.	78
5.5.1 O DIA SOLAR MÉDIO E O DIA SIDERAL MÉDIO: A SUA INTER-RELAÇÃO.	79
5.7 EXEMPLO DE DETERMINAÇÃO DO TEMPO SIDERAL	81

CAPÍTULO 6. AS ESTRELAS COMO INSTRUMENTOS DE POSICIONAMENTO.... 82

6.1 REFRACÇÃO ASTRONÓMICA OU ATMOSFÉRICA	82
6.1.1 ATMOSFERA APROXIMADA A CAMADAS PLANAS E PARALELAS	83
6.1.2 ATMOSFERA APROXIMADA A CAMADAS ESFÉRICAS E CONCÊNTRICAS	85
6.1.3 TABELAS PARA CÁLCULO DA REFRACÇÃO.....	85
6.1.4 EFEITO DA REFRACÇÃO ASTRONÓMICA NO NASCIMENTO E/OU OCASO DO ASTRO.	86
6.2 PARALAXE GEOCÊNTRICA	88
6.3 ABERRAÇÃO DIURNA.....	91
6.4 MÉTODOS DE POSICIONAMENTO POR OBSERVAÇÃO ASTRONÓMICA.....	92
6.4.1 DETERMINAÇÃO DO AZIMUTE	92
6.4.2 DETERMINAÇÃO TEMPO UNIVERSAL DE OBSERVAÇÃO	92
6.4.3 DETERMINAÇÃO DA LONGITUDE	93
6.4.4 DETERMINAÇÃO DA LATITUDE.....	94

COMENTÁRIOS FINAIS..... 96

A1 – TABELAS DA REFRACÇÃO.....	97
A2 – EXERCÍCIOS	99

BIBLIOGRAFIA (BP – PRINCIPAL; BS – SECUNDÁRIA).....116

Introdução e breve resenha histórica*

*Ô Paradis, sorti de l'onde,
Ciel si bleu, ciel si pur dont mes yeux sont ravies ...*

(IV acto de L'Africaine, Giacomo Meyerbeer, 1865)

Astronomia é a ciência que estuda os astros. Esta definição simples encerra em si toda a complexidade de alguém (ciência ou cientista) que se aventura no conhecimento dos astros. De todos os astros? Sim, de todos sem excepção!

Comecemos pelo princípio, ou seja, comecemos por nós próprios enquanto observadores. Numa noite de céu estrelado, longe da poluição luminosa dos grandes centros urbanos, é difícil não fixarmos o olhar na abóbada celeste que nos circunda e envolve dando a aparente sensação de nos encontrarmos no centro de um enorme planetário, ocupando um lugar privilegiado para a observação astronómica. “Observação astronómica”, sim! É que esta não necessita necessariamente de instrumentos ou de aparelhos de ampliação da imagem (telescópios). A humanidade observa o Universo com esses aparelhos há apenas 400 anos. Até ao início do século XVII todo o estudo astronómico passava pela observação a olho nu com a mesma técnica que permite a cada um de nós deleitar os sentidos na tal noite de céu estrelado. E o que pode afinal cada um de nós ver? Confesso que gostaria de não responder a esta pergunta, convidando cada um a fazer a experiência por si e dar tempo para ouvir as respostas. Por outro lado, convenci-me que alinhavando aqui um resposta à pergunta poderia motivar alguém mais renitente para, na tal noite do céu estrelado, levantar os olhos ao firmamento e usufruir ...

Vamos então imaginar uma noite propícia à observação dos astros. É difícil prever o aspecto do céu estrelado que primeiro vai impressionar cada um nós. Seguramente esse aspecto é diferente para cada um dos observadores. Mas eu permitir-me-ia adiantar que há aspectos que são incontornáveis:

- A distribuição das estrelas no céu não é uniforme;
- Há muitas zonas do céu, aparentemente, sem qualquer estrela;
- Há estrelas mais brilhantes do que outras;

* Baseado no texto "A observação do Universo: a utopia de atingir o inatingível", 2009, em "Utopias & Distopias", Ed. Imprensa da Universidade de Coimbra, p. 263

- Contudo, as estrelas parecem todas do mesmo tamanho;
- Se tivéssemos paciência para contar, chegaríamos à conclusão que conseguimos observar pouco mais de 1000 estrelas. Esta informação dos sentidos contrasta com a generalizada ideia de que “há tantas estrelas no céu como grãos de areia na praia”.

Continuando com a observação, e se tivéssemos um pouco mais de atenção, repararíamos que:

- Com o adiantar das horas as estrelas e a Esfera celeste parecem (co)mover-se num mesmo movimento, em termos gerais, de este para oeste;
- Há estrelas que se observam até uma determinada hora e que se vão aproximado cada vez mais do horizonte e depois parecem desaparecer, lá longe;
- Ao contrário, há estrelas que, no lado diametralmente oposto às anteriores, passam a ser visíveis e com o andar das horas vão subindo no céu;
- Há, no entanto, uma estrela, a norte (a estrela Polar), que parece não respeitar esta “lei” da estrela que aparece e desaparece.

Podíamos continuar a debitar o conjunto de observações e sensações que cada um de nós pode ter numa noite de céu estrelado. Posto isto, não será difícil imaginar que o começo da Astronomia, como ciência que se ocupa do estudo dos astros, perde-se nos confins dos tempos. Afinal, para nos inteirarmos das realidades acima expostas basta observar e isso faz a Humanidade há muito tempo.

Há evidências de que observações astronómicas estão presentes na disposição das pirâmides egípcias, construídas em 3000 a.C., ou no Stonehenge, erigido pelos habitantes das ilhas britânicas há mais de 4000 anos. No entanto, não será difícil admitir que a observação do firmamento é tão antiga quanto o próprio Homem.

O interesse da Humanidade no aperfeiçoamento do conhecimento sobre o Universo reparte-se por diversas razões. Antes de mais por razão de ordem prática. Alguns fenómenos celestes são periódicos e por isso fornecem relógios naturais de importância extrema para a evolução e organização da vida humana. A navegação marítima, do período das Descobertas, teve também como consequência o desenvolvimento da arte de observar e medir os céus. Mas há também razões de interesse puro no avanço dos conhecimentos. São inúmeros os exemplos que cruzam a História da civilização.

Hoje em dia, a ideia de astronomia está profundamente ancorada na questão instrumental, a saber, nos meios de observação como os grandes telescópios instalados à superfície terrestre ou os telescópios-

satélites colocados em órbita ou em sondas espaciais. Mas, durante muitos séculos foi o olho nu que trouxe à Humanidade resultados que foram permitindo o conhecimento do Universo.

Não é nosso objectivo fazer um resumo da História da Astronomia (os mais interessados poderão consultar a obra Hoskin 1999). Desejamos tão só destacar alguns dos mais importantes resultados.

Antes de mais, note-se a determinação do raio da Terra por métodos astronómicos. Usando uma metodologia particularmente simples, Eratóstenes (276-195 a.C.) consegue estimar um valor do raio da Terra. O método estava baseado na observação simultânea do Sol em dois locais à superfície da Terra, suficientemente afastados: Assuão (ex-Syene) e Alexandria (a quase 800 km de distância de Assuão). No caso Assuão, no solstício de verão, os raios solares iluminavam o fundo de um poço fruto do facto do Sol culminar no zénite do lugar. Por outro lado, em Alexandria, à mesma hora, uma barra vertical projectava sombra (Fig. 1 e 2)

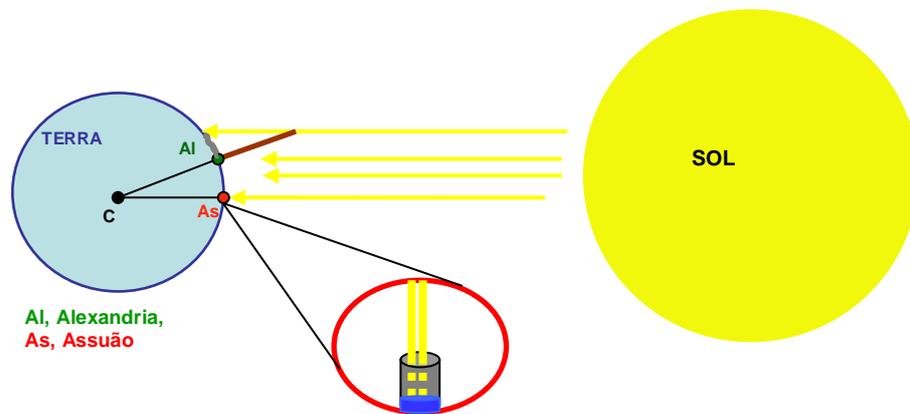


FIGURA 1 - Determinação do raio da Terra por Eratóstenes: observações durante o solstício de verão.

Uma simples construção geométrica ...

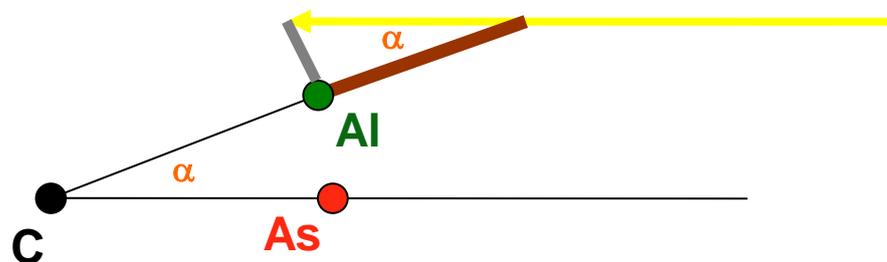


FIGURA 2 - Determinação do raio da Terra por Eratóstenes.

... permite concluir que

$$\tan \alpha = \frac{\text{sombra}}{\text{altura}} \Rightarrow \alpha \approx 7.2^\circ$$

Usando $d_{\text{AsAl}} \approx 800 \text{ km}$,

$$R = \frac{800 \times 360}{7.2 \times 2\pi} = 6366 \text{ km}$$

O valor espanta pela coincidência com o valor actual de 6378 km (raio equatorial). Esta foi, seguramente a primeira determinação fiável da medição do raio da Terra. Posteriormente, Posidonius de Rodes (135-51 a.C.) usou um método semelhante, baseando-se em observações da estrela *Canopus*, para redeterminar o raio da Terra.

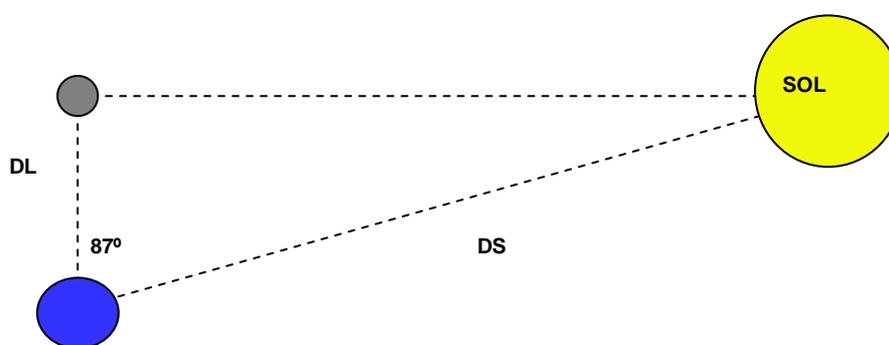


FIGURA 3 - Determinação das distâncias relativas Terra-Sol (DS) e Terra-Lua (DL).

Os métodos geométricos permitiram outras determinações. Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.), mais famoso pela sua prematura proposta heliocêntrica, fez uma primeira estimativa da distância relativa Terra-Sol (DS) e Terra-Lua (DL) usando observações da Lua em quadratura (Fig. 3)

O valor obtido foi da ordem de $DS/DL \sim 20$, algo menos impressionante do que o caso anterior quando comparado com o valor actual (~ 400), embora plenamente justificável tendo em conta os meios e distâncias envolvidas. Em todo o caso “some Greek astronomers were more fascinated with finding out how to answer a question, than with answering it” (Hoskin 1999, p.34).

Por outro lado, e num registo mais “astrofísico”, encontramos hipóteses de que foi Anaxágoras (500– 428 a.C.) o primeiro a observar uma mancha solar em 467 a. C. (Bicknell, 1964). Sendo ou não Anaxágoras, é certo que o primeiro registo de uma mancha solar foi feito muito antes da invenção do telescópio. A figura 4[†] mostra um desenho de

[†] Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:ChroniclesofJohnofWorcester.jpg>

uma mancha feito em 1129 por um monge inglês de nome John of Worcester.

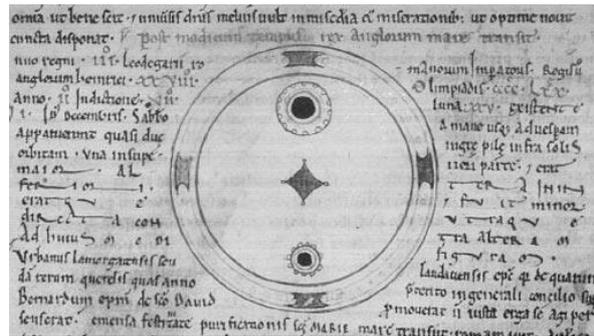


FIGURA 4 - Desenho da mancha solar da autoria de John of Worcester no séc. XII.

Apesar da, já referida, motivação essencialmente intelectual e filosófica na compreensão do Universo por parte dos sábios gregos, não é menos certa a preocupação em reproduzir a realidade. Este facto está bem presente, por exemplo, nas correcções e melhoramentos introduzidos no modelo geocêntrico. É o caso da proposta de Hipparchus de Niceia (190-120 a.C.), que sabia que as estações do ano tinham amplitudes temporais diferentes: Primavera-Verão = 94,5 dias, Verão-Outono = 92,5 dias, etc. Assim, o movimento do Sol em torno da Terra estaria mais em consonância com as observações se a Terra ocupasse, não o centro da órbita, mas um ponto afastado e descentrado (Fig. 5).

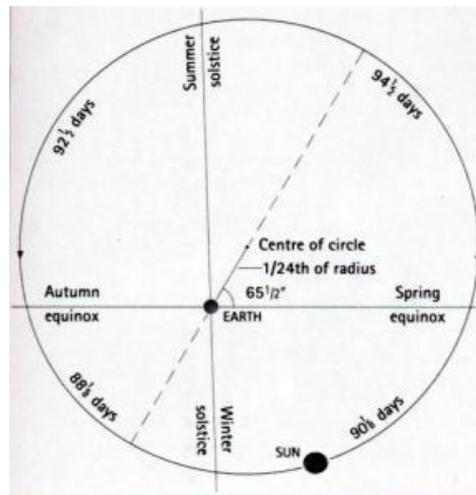


FIGURA 5 - Hipparchus de Niceia e o modelo que contempla estações do ano de duração variável (Fonte da imagem: Hoskin 1999).

Por outro lado, com objectivo de explicar o movimento retrógrado dos planetas, nascem os epiciclos.

Seja a figura 6[‡] quando observado, em diferentes instantes, da Terra (T), a trajectória (aparente) de um planeta (P) ocupa na esfera celeste as posições “A”. Repara-se na figura 6, que a posição aparente do planeta na esfera celeste A4 aparece entre as posições A1 e A3 e contudo o instante 4 é posterior a estes dois. É como se o movimento do planeta (visto da Terra) invertesse o sentido.

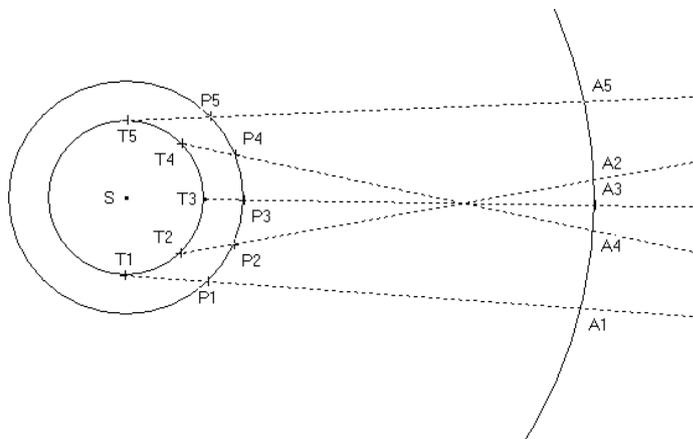


FIGURA 6 - O Movimento retrógrado dos planetas.

Sendo que o modelo geocêntrico impunha um movimento planetário sempre no mesmo sentido, havia que fazer algo. Para salvaguardar o modelo desta observação foram adicionados os epiciclos, sobre os quais os planetas se movem. O centro do epiciclo, descreve assim, uma órbita – o deferente - em torno da Terra (Fig. 7[§]).

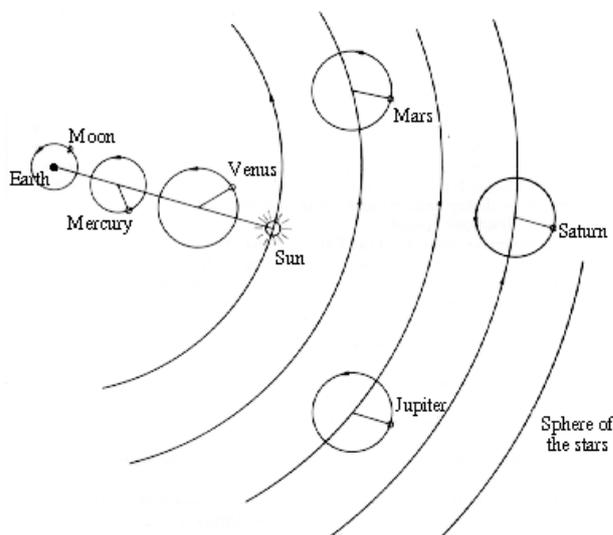


FIGURA 7 - O modelo geocêntrico com epiciclos e deferentes.

O modelo geocêntrico foi a base do ensino e compreensão do Universo até meados do século XVI. Aí inicia-se um século de ouro onde

‡ Fonte: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fc/Retrogradation.png>

§ Fonte: http://abyss.uoregon.edu/~js/images/ptolemy_ss.gif

personagens como Copérnico, Brahe, Kepler e Galileu levam a ciência e a Astronomia a uma patamar nunca antes atingido. Pela sua importância, abordaremos esta época com mais algum detalhe.

Com Nicolau Copérnico (1473-1543), o modelo heliocêntrico toma novo impulso o Sol no centro e os planetas (Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno) em órbita deste (Fig. 8**):

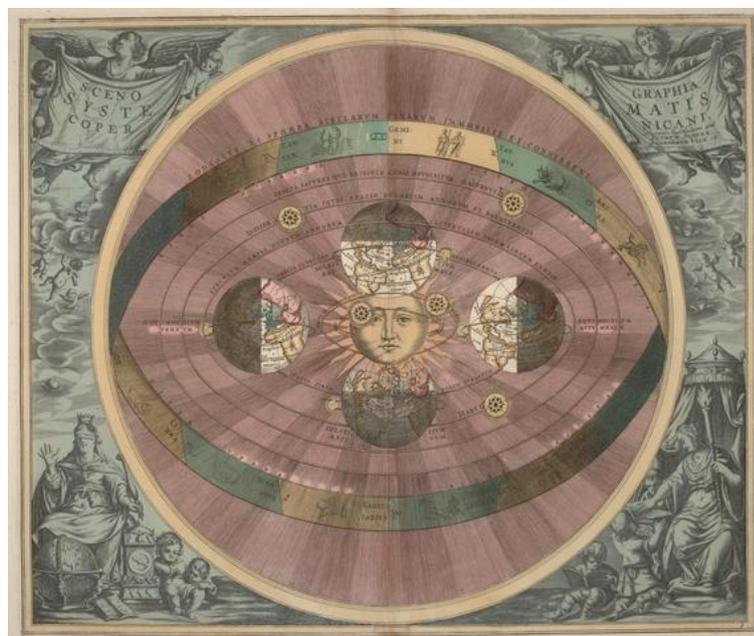


FIGURA 8 - O modelo heliocêntrico de Copérnico (Andreas Cellarius, Harmonia Macrocosmica, 1708).

Apresentado pelo próprio autor como um artefacto matemático mais simples para a determinação dos movimentos planetários, este modelo vai ocupar papel cimeiro nas discussões dos anos seguintes.

Johanes Kepler (1571–1630) foi, provavelmente, o último grande astrónomo a extrair do Universo a olho nu relevantes resultados. E quão relevantes são as suas três leis!

Kepler era um heliocêntrista convicto e via em Tycho Brahe (1546–1601), e nas suas observações, uma oportunidade para confrontar as asserções teóricas sobre o movimento dos planetas. Kepler e Brahe não terão convivido durante muito tempo, um ano talvez. Porém, parece certo que o seu relacionamento não foi fácil. Afastando-nos, neste contexto, das recentes teorias (mais ou menos) conspirativas que atribuem a Kepler responsabilidade moral e material (!) da morte de Brahe (Gilder and Gilder, 2005), o facto é que Tycho reconhecia no jovem Johanes valor como matemático e como astrónomo. Consta até, que na sua agonia final, Tycho teria doado as observações que fizera de Marte a Kepler para que “A minha vida não tenha sido em vão”.

** Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:Heliocentric.jpg>

Com essas observações, Kepler trabalhou afincadamente nos anos seguintes e em 1609 publicou uma obra chamada “Astronomia nova” onde é proposto que as órbitas dos planetas são elipses e o Sol ocupa um dos focos. Esta proposta ficou conhecida como a primeira lei de Kepler.

Kepler chega a esta conclusão depois de ter analisado detalhadamente as posições de Marte relativamente ao Sol e ter constatado que a órbita desenhada pelo planeta se afastava de uma circunferência. A diferença, entre a solução circular e as observações, encontrada por Kepler, era da ordem de 8 minutos de arco, ou seja, 0.13° . Kepler poderia muito bem ter interpretado esta diferença como um erro de observação. Contudo, Kepler sabia a qualidade das observações do grande observador. Brahe dispunha, na altura, do equivalente hoje em dia aos melhores telescópios do Mundo: um enorme quadrante mural (Fig. 9^{††}).

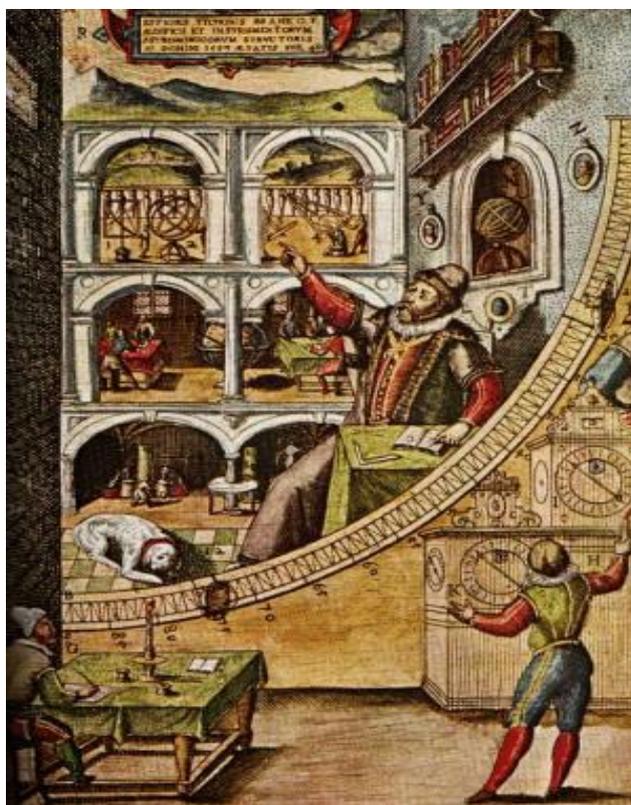


FIGURA 9 - Tycho Brahe e o quadrante mural no Observatório de Uraniborgue (Dinamarca).

Este instrumento permitia a Tycho ter uma precisão nas observações de poucos minutos de arco. Uma curiosidade relaciona os métodos (rigorosos) de observação de Tycho com Portugal: de facto, Tycho Brahe, terá usado o conceito do nónio da autoria Pedro Nunes. Numa carta que Tycho escreve ao matemático Cristóvão Rothmann em 1587 pode ler-se “Mas, logo que em seguida, comecei a tomar

†† Fonte: http://www.cvalg.pt/astrologia/historia/tycho_brahe.htm

rigorosamente a altura dos astros com a ajuda de quadrantes e me apercebi pela experiência, que a divisão comum, levado o mais longe possível, não era suficiente nos pequenos instrumentos, recorri ao subtil processo que Nunes apresenta na terceira preposição do seu *De Crepusculis*, e o tornei mais exacto, aumentando o número de subdivisões e calculando tábuas pelas quais se poderia conhecer imediatamente e com precisão a altura de um ponto qualquer. E, como esta invenção de Nunes, assim como a experiência me tinha provado, não satisfazia as suas promessas, eu pergunto-me se o processo, pelo qual se chega, por meio de pontos transversais, a dividir uma recta em partes muito pequenas, não poderia aplicar-se também às linhas curvas."^{‡‡}

Assim, Kepler, confiante na qualidade dos dados que tinha na mão, abandona a hipótese de uma órbita circular para Marte. Este despojar de um conceito – o da circularidade das órbitas – é particularmente notável em Kepler, já que ele acreditava que os planetas desenhavam, justamente, órbitas circulares em torno do Sol. Anos antes, numa obra de juventude, Kepler tinha postulado um intrincado modelo do sistema solar em que os espaços interplanetários eram quantificáveis pelos cinco poliedros regulares (Fig. 10^{§§}).

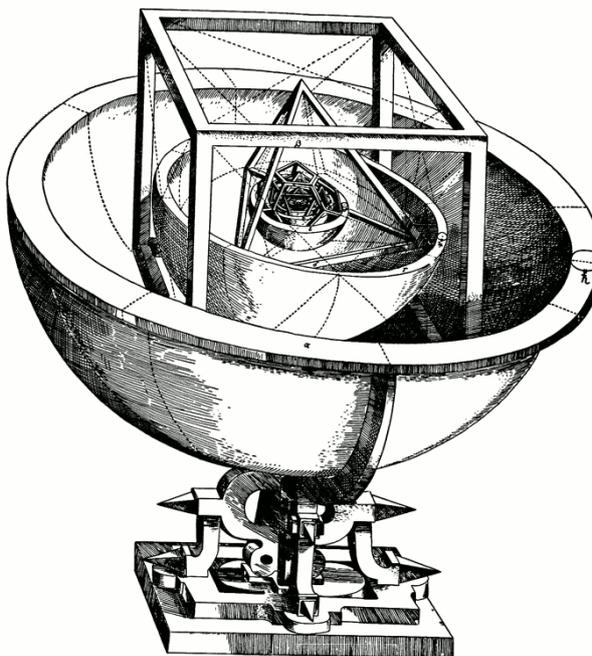


FIGURA 10 - O “Mysterium Cosmographicum” e os poliedros regulares.

A obra em causa chama-se “Mysterium Cosmographicum” e foi publicada em 1596. “Eu pretendo provar que Deus, criando o Universo

‡ Citado em “Centro Virtual Camões. Ciência em Portugal” (<http://www.instituto-camoes.pt/cvc/ciencia/e20b.html>)

§§ http://www.portaldoastronomo.org/tema_19_3.php

dando regras à disposição dos Céus, teve em vista os cinco poliedros regulares da geometria, célebres desde Pitágoras e Platão, fixando, tendo em conta as suas dimensões, o número, as suas proporções e a relação entre os respectivos movimentos”, escreve Kepler na obra.

Regressando à “Astronomia nova”, Kepler mostra ainda, aquela que viria a ser perpetuada como, a segunda lei de Kepler: um vector imaginário que liga o Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Esta lei tem uma consequência imediata: a velocidade escalar do planeta aumenta quando este se aproxima do Sol, obtendo o valor máximo no ponto da órbita mais próxima do Sol, o periélio.

A terceira lei de Kepler, veio a ser mostrada em 1619 num nova obra de Kepler de nome “*Harmonicis Mundi*”, onde é exposto um tratado fazendo corresponder os movimentos planetários a uma celeste composição musical. Nesta terceira lei é referido que o quociente do quadrado do período orbital pelo cubo do semi-eixo maior da órbita planetária é uma constante.

Como é claro, as leis de Kepler são de natureza empírica e (apesar de Kepler ter já consciência da importância do Sol como “motor” dos movimentos planetários) estas só vieram a ser compreendidas à luz da mecânica Newtoniana. No quadro da teoria Teoria da Gravitação Universal de Isacc Newton (1643–1727) a força mútua de atracção gravitacional entre o Sol e o planeta (Fig. 11)...

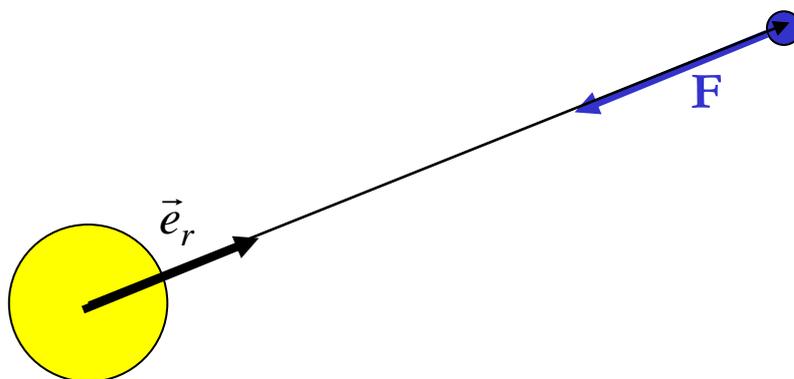


FIGURA 11 - Força atractiva Sol-planeta.

... é descrita pela Lei da Gravitação Universal:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

onde G é a constante de gravitação universal, M a massa do Sol e m a massa do planeta. Assumindo a segunda lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

O que conduz a uma equação diferencial cuja integração permite demonstrar que,

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos\theta(t)}$$

que é, como se sabe, a equação de uma cónica em coordenadas polares. Este resultado não só integra a primeira lei de Kepler – órbita elíptica - como a amplia para a possibilidade das órbitas poderem (pelos menos em termos teóricos) serem parábolas ou hipérbolas.

Por outro lado, ainda no quadro da Lei da Gravitação Universal, demonstra-se a terceira lei de Kepler na forma:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

dando significado físico à constante encontrada por Kepler.

É um facto que a Astronomia de Kepler é baseada na observação a olho nu. Por outro lado, é curiosa a coincidência temporal entre o estabelecimento das leis de Kepler (1609 e 1619) e as primeiras observações com uso do telescópio por Galileu em 1609-1610. De uma certa forma Galileu abre a porta da astronomia moderna com o uso do telescópio enquanto Kepler “fecha” a porta da astronomia a olho nu. Mas fecha-a com chave de ouro!

Por volta de 1608, o astrónomo italiano Galileu Galileu (1564-1642) toma conhecimento de notícias vindas da Holanda sobre um óculo que permite uma visão ampliada de objectos distantes. Galileu empreende a construção de um instrumento similar e com ele regista observações astronómicas nos primeiros meses de 1610. Galileu, tendo seguramente consciência da importância das suas descobertas, publica rapidamente (a 12 de Março desse ano!) o seu “Sidereus Nuncius” e dá a conhecer ao Mundo que existe um universo muito mais vasto, para lá do que olhos humanos podem apreender (Fig. 12^{***}).

*** http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sidereus_Nuncius_1610.Galileo.jpg

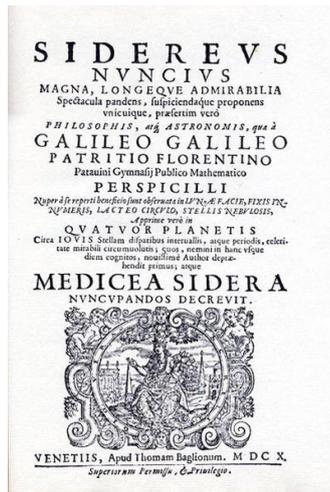


FIGURA 12 - Frontispício do “Sidereus Nuncius” (1610)^{†††}.

Com um telescópio dotado de uma lente que não aumentava mais de uma dezena de vezes, Galileu descobre que Júpiter tem satélites tal como a Terra tem a Lua e que esta é, afinal, um corpo cravejado de crateras. Mostra ainda que há mais estrelas no céu do que as visíveis a olho nu.

Após a publicação do livro, Galileu continua as suas observações: Saturno (em Abril de 1610) e as manchas do Sol em 1613.

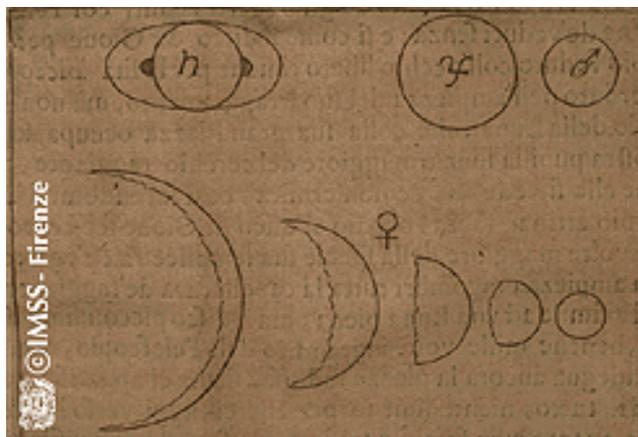


FIGURA 13 - Registo das observações das fases de Vénus. Nesta imagem vêem-se ainda outras observações entre as quais se destaca Saturno, no canto superior esquerdo (Fonte da imagem: Instituto e Museo di Storia della Scienza- Firenze, Italia).

Porém, é ainda no final de 1610 que Galileu faz aquela que é provavelmente a sua observação astronómica de maior impacto: as fases de Vénus. Tal como a Lua, Galileu observa que Vénus tem fases

^{†††} Este livro foi editado em Portugal, pela primeira vez e sob o título “Mensageiro das Estrelas, pela Fundação Calouste Gulbenkian com tradução de Henrique Leitão (FCUL), a 17 de Março de 2010, por ocasião da sessão de encerramento do Ano Internacional de Astronomia 2009.

incluindo a “Vênus-Cheia” (Fig. 13^{###}). Porém tal como pode ser constatado na figura 14, o modelo geocêntrico não prevê a existência de uma fase cheia (ou quase) para Vênus.

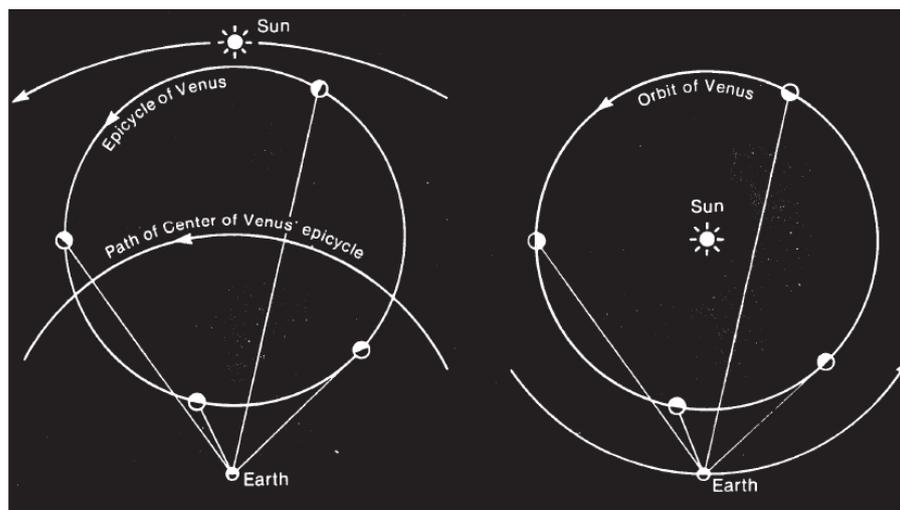


FIGURA 14 - As fases de Vênus vistas pelos dois modelos: geocêntrico e heliocêntrico (Fonte da imagem: Gingerich 2003).

Assim Galileu destrona, com este fundamental conjunto de observações, o modelo geocêntrico. Para mais detalhes consultar Palmieri (2001).

Porém, dar argumentos observacionais que invalidem a hipótese geocêntrica é uma coisa. Outra coisa, é a validação do modelo heliocêntrico. Ou seja, a derrota de um modelo não conduz, *per si*, à vitória de outro. Os modelos são ... modelos e, por isso, pode sempre arranjar-se tantos modelos que reproduzam as observações quando o engenho e a criatividade humana o permitirem.

E, curiosamente, era disso que se tratava.

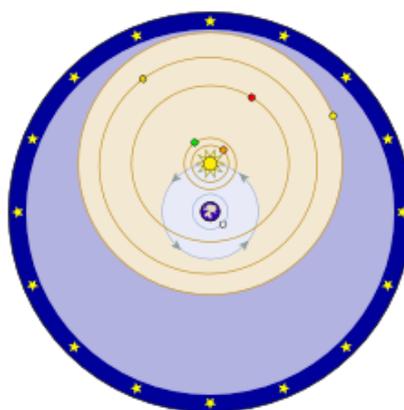


FIGURA 15 - O modelo de Tycho Brahe.

<http://astronomianoavaledoaco.blogspot.pt/2012/03/galileu-galilei-o-mensageiro-das.html>

É que os modelos geocêntrico e de heliocêntrico não eram os únicos modelos discutidos na época. Tycho Brahe, que não acreditava no movimento da Terra (baseado no facto de não se conseguir observar a paralaxe estelar) propôs um modelo alternativo que conjugava as ideias geocêntricas e heliocêntricas: a Terra encontra-se no centro; a Lua e o Sol têm movimentos em torno dela; mas os restantes planetas orbitam em torno do Sol (Fig. 15)^{§§§}.

O curioso é que o modelo de Tycho também permite uma explicação das fases de Vénus, em particular a “Vénus-Cheia”. Assim, observado da Terra, as fases de Vénus são igualmente reproduzidas pelos modelos de Copérnico – heliocêntrico – e pelo de Tycho Brahe.

Esta constatação de que os dois modelos reproduziam as observações astronómicas então conhecidas, deu origem a um interessantíssimo debate em que os astrónomos jesuítas estiveram particularmente envolvidos.

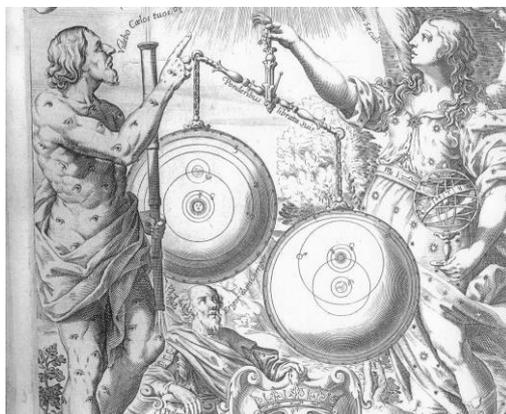


FIGURA 16 - Frontispício de “Almagestum novum” de Giovanni Battista Riccioli (1651).

A figura 16^{****} apresenta o frontispício da obra de Giovanni Battista Riccioli, de 1651, onde se sugere um pender da balança para Tycho em detrimento de Copérnico. De igual forma, na “Aula da Esfera” proferida por Giovanni Paolo Lembo, no colégio de Santo Antão em Lisboa, entre 1615 e 1617, são rejeitados os modelos heliocêntrico e geocêntrico dando preferência ao modelo de Tycho Brahe ou a suas variações (Leitão, 2008).

Frequentemente os textos pedagógico-didáticos secundarizam a discussão dos três sistemas, centrando-se na dicotomia Copérnico-Ptolomeu. De facto o processo e a condenação de Galileu em 1633, lamentável acontecimento (para Ciência, para Galileu e para a própria Igreja), acabou por deslocar o centro de gravidade de uma problemática

^{§§§} http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Tychonian_system.svg

^{****} <http://en.wikipedia.org/wiki/File:AlmagestumNovumFrontispiece.jpg>

que (para lá de motivações teológicas) tem, na sua génese, a discussão de argumentos científicos.

Em todo o caso, o que importa aqui valorizar é a introdução do telescópio. O Homem compreende então que a construção de telescópios cada vez maiores pode “trazer” para perto o mais longínquo.

No séc. XIX, duas novas realidades vêm dar um desenvolvimento maior ao estudo da Astronomia. Em 1880 William Herschel põe em evidência a radiação infravermelha. Sucedem-se, em finais do século, a descoberta das ondas de rádio por Heinrich Hertz e dos raios X por Wilhelm Roentgen. Temos assim um outro universo para além do visível. Além deste facto, e também por causa dele, os astrónomos rapidamente compreendem que não seria suficiente a simples observação, mas haveria necessidade de guardar e medir a luz vinda dos astros. Instrumentos como o espectroscópio ou o fotómetro cumprem então esta missão e dão um novo avanço à Astronomia em particular e à Ciência em geral. Assim, já não interessa só conhecer as posições e trajectórias dos astros, como até então, mas também as suas propriedades intrínsecas: composição química, temperatura, energia irradiada, etc. As preocupações do desenvolvimento experimental vão estar sempre na vanguarda da Astronomia e permitem que se chegue ao início do séc. XXI com telescópios de 10m de diâmetros colocados à superfície da Terra, telescópios espaciais, que nos revelam os confins (e o início) do Universo e sondas que visitam outros planetas do nosso Sistema Solar.

Assim, da observação astronómica resulta a tentativa da compreensão do Universo através de leis tão generalizáveis quanto possível, isto é, o astrónomo espera que ao estudar, por exemplo, o Sol esteja a contribuir para o estudo de todas as estrelas com propriedades semelhantes à do Astro Rei. Poderemos argumentar que este procedimento é geral na Ciência e em todas as suas áreas. Será assim ! Mas na Astronomia toma uma dimensão especial, tendo em conta as escalas espaciais e temporais que envolvem os objectos astronómicos. Por um lado, a maior parte dos objectos estudados pelo astrónomo estão muito longe^{†††} e não é possível intervenção directa, ou seja, “tocar” ou fazer experiências em laboratório (excluindo os raros exemplos da análise de rochas lunares ou marcianas e de asteróides caídos na Terra). Por outro lado, o tempo de evolução dos astros é demasiado elevado^{††††} para que possamos assistir, em directo, ao desenrolar do filme do Universo. Assim, a radiação electromagnética (vulgo luz) que nos chega dos astros são a nossa ligação a eles. Admitindo as mesmas propriedades fundamentais da radiação emitida por qualquer astro, então o progresso da Astronomia constrói-se pela comparação/confronto entre os conceitos teóricos e as observações. É uma verdadeira colaboração em favor do Conhecimento Humano!

††† A estrela mais próxima da Terra, depois do Sol, está a mais de 40000 mil milhões de quilómetros!

†††† O Sol que nasceu há 4.6 mil milhões de anos, terá outro tanto de vida!

Alguns comentários sobre estas notas

Estas notas são o corolário de uma reflexão pessoal feita no seguimento da leccionação feita nos últimos quatro anos, tendo em conta a recente reforma de Bolonha. Ou seja, propus-me responder à seguinte pergunta: sabendo que duas disciplinas (Elementos de Astronomia e Astrofísica e Astronomia Geodésica) desapareceram com a reforma de Bolonha e que uma nova disciplina foi criada (Elementos de Astronomia), que informação das duas cadeiras anteriores deveria ser integrada na nova disciplina? Acresce a este facto que a disciplina de Mecânica Celeste se mantém após a reforma e que importa conjugar articular a informação de ambas as cadeiras.

Esta discussão, iniciei-a há dois anos, em conjunto com a minha colega Dina Loff (que normalmente tem assumido as cadeiras da área da Mecânica). Porém, gostaria de referir que estas notas apenas me comprometem a mim e sou o único responsável pelo seu conteúdo.

Do ponto de vista geral, a articulação entre a cadeira de Elementos de Astronomia e Mecânica Celeste poderia reflectir a separação entre uma parte onde a posição do astro (independentemente da causa) toma a relevância e uma segunda parte, necessariamente, mais dinâmico onde é estudado o movimento dos astros e as suas causas.

Assim, no caso da cadeira de Elementos de Astronomia a interpretação da posição na Esfera celeste, adquire um papel fundamental. Estas notas, de nome “Princípios de Astronomia Esférica” pretendem dar os instrumentos matemáticos necessários a essa interpretação.

No primeiro capítulo são desenvolvidos os fundamentos da trigonometria esférica. O segundo e terceiro capítulos usam a trigonometria esférica para o estudo do movimento diurno e do movimento anual. O capítulo dos Sistemas de Tempo é estudado com vista à determinação do Tempo Sideral Local, fundamental para a determinação da posição observada de um astro numa dado local e hora, utilizada depois no último capítulo relativo ao posicionamento por métodos astronómicos. Este capítulo é colocado, por razões históricas (as matérias aqui abordados foram durante muitos anos ensinadas, apenas, no âmbito da licenciatura de Engenharia Geográfica, onde a questão do posicionamento é particularmente relevante) e por razões de motivação dos alunos, já que se trata de uma oportunidade para realizar trabalho de observação astronómica.

Este documento não tem (ainda) o objectivo de ser um livro de texto académico. Deve, antes de mais, ser visto como um manual de apoio aos alunos. Este texto tem o objectivo de ser distribuído por via electrónica e por isso houve a preocupação não gerar um ficheiro demasiado “pesado”. Assim, as imagens a cores foram restritas ao capítulo de introdução. Todas as figuras não referenciadas são da minha responsabilidade. Optou-se por escrever com minúsculas todas

as definições (pólo, norte, sul, este, oeste, celeste, equador, eclíptica, etc.), com duas excepções: quando estes termos aparecem em figuras ou quando nos referimos às grandezas associadas ao tempo (Tempo Solar, Tempo Sideral, Tempo Universal, etc.).

Coimbra, 30 de Abril de 2008

A segunda versão destas Notas é divulgada em 2009, o “Ano Internacional de Astronomia” (www.astronomy2009.org). Trata-se de um ano destinado à celebração da Ciência em geral e da Astronomia em particular. Esta celebração envolve, à data de hoje, 146 países ! Em Portugal decorrem centenas de actividades. Todos os detalhes da comemoração nacional podem ser consultados em www.astronomia2009.org . Votos (de continuação) de um excelente Ano Internacional da Astronomia.

Coimbra, 8 de Setembro de 2009

A terceira versão das Notas apenas inclui correcções de gralhas, encontradas por mim ou vários alunos, cuja referência muito agradeço.

Coimbra, 27 de Setembro de 2010

A quarta versão das Notas apenas inclui correcções de gralhas, encontradas por mim ou vários alunos, cuja referência muito agradeço.

Coimbra, 14 de Setembro de 2011

A quinta versão das Notas inclui correcções de gralhas, encontradas por mim ou vários alunos, cuja referência muito agradeço. Foi ainda retirada da página 87 a referência ao avermelhamento do Sol no nascimento/ocaso.

Coimbra, 1 de Outubro de 2012

A sexta versão das Notas apenas inclui correcções de gralhas, encontradas por mim ou vários alunos, cuja referência muito agradeço. O texto não está escrito de acordo com o acordo ortográfico.

Coimbra, 25 de Setembro de 2013

Capítulo 1. Trigonometria Esférica

Ma per fortuna è una notte de luna, e qui la luna l'abbiamo vicina.

(I acto de La Bohème, Giacomo Puccini, 1896)

São vários os alvos de estudo da Astronomia. Um dos mais seculares e, ao mesmo tempo, sempre actual é o que concerne o estudo das posições dos astros, no firmamento, a um dado instante e observados de um dado local.

Materializemos agora o “firmamento” na Esfera celeste. Entende-se por Esfera celeste o local imaginário, onde estão projectadas as posições dos astros vistas por um determinado observador. De notar que a Esfera celeste não tem raio definido, já que a distância aos objectos astronómicos é muito superior a qualquer espaço percorrido pelo observador à superfície da Terra. Ou seja, o observador da Esfera celeste não tem a sensação de profundidade. Mas também não é importante. O conceito de Esfera celeste faz, assim, sentido na observação astronómica uma vez que apenas a olho nu (e sem informação prévia) não é possível identificar quais os objectos mais próximos da Terra e quais os mais afastados. Assim sendo a Esfera celeste o “local de trabalho” convém introduzir algumas das propriedades da geometria esférica que serão fundamentais para a quantificação das posições dos astros.

Assim, sendo a esfera celeste o “local de trabalho” convém introduzir algumas das propriedades da geometria esférica que serão fundamentais para a quantificação das posições dos astros.

1.1 A Esfera

Uma esfera é a superfície curva fechada cujos pontos se encontram todos a igual distância, R , de um ponto interior, *o centro da esfera*.

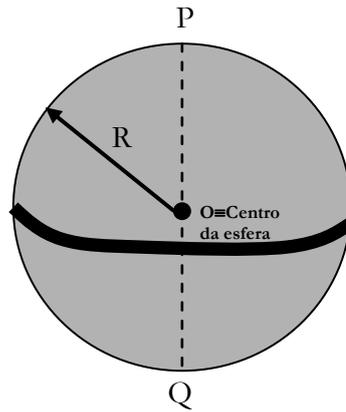


FIGURA 1.1 - A esfera de raio R.

Denomina-se de círculo máximo (a negrito na figura 1.1) a circunferência resultante da intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro, sendo que o perímetro é $2\pi R$. Os pontos P e Q são os pólos do círculo máximo. Os meridianos e o equador terrestre são exemplo de círculos máximos da esfera terrestre.

Podemos agora definir o arco de círculo máximo (ex. arco AB da figura) ou seja uma porção de um círculo máximo. Comprimento do arco = $R\alpha$, em radianos (Fig. 1.2)

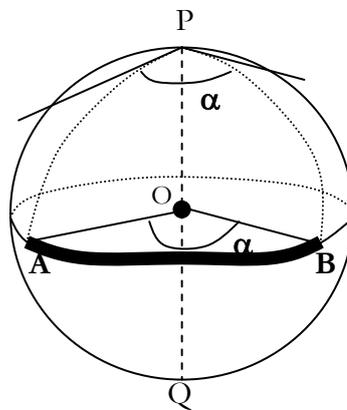


FIGURA 1.2 - Arco de círculo máximo AB.

Como consequência das definições anteriores podemos estabelecer que um ângulo esférico (ex. $APB = \alpha$) é o ângulo entre dois arcos de círculo máximo (ex. PA e PB) ou seja, ângulo entre os dois planos que contêm os arcos de círculo máximo. Neste curso usaremos a seguinte nomenclatura: Arco \equiv AB; Ângulo esférico em B \equiv ABC ou CBA.

Há ainda um resultado relacionado com o conceito de “círculo máximo” de enorme importância prática. Havendo uma infinidade de linhas que unem dois pontos na superfície de uma esfera, demonstra-se

que linha que corresponde ao menor espaço percorrido— a distância - é um arco de círculo máximo. Por exemplo o comprimento de uma milha marítima é igual a 1.855 km e corresponde à amplitude, medida sobre o equador, de um arco cujo ângulo ao centro é 1 minuto de arco (1').

Um círculo menor resulta da intersecção da esfera com um plano que não passa pelo seu centro. O seu perímetro é $(R \cos \beta) \times 2\pi$, em radianos (fig. 1.3)

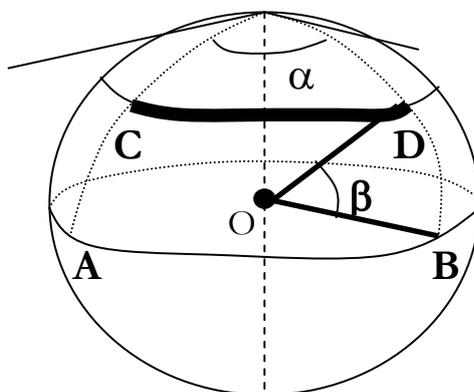


FIGURA 1.3 - Arco de círculo menor (CD).

Assim, o arco de círculo menor (ex. arco CD) é porção de um círculo menor. O seu comprimento é $(R \cos \beta) \times \alpha$, em radianos

1.2 Triângulo Esférico

A resolução de problemas ligados ao posicionamento numa esfera, em particular, as esferas terrestre e celeste, passa pelo cálculo do comprimento angular de arcos de círculo máximo e/ou menor e de ângulos esféricos. Em particular, no que concerne os arcos de círculo máximo e os ângulos esféricos, temos a considerar a figura dos “Triângulos Esféricos”. Para isso, começaremos pela definição de triângulo esférico e a revisão do sistema de coordenadas esférico e da sua relação com os sistema de coordenadas cartesianas.

Triângulo esférico é uma superfície esférica delimitada por três arcos de círculo máximo. Os vértices de um triângulo esférico representam-se por letras maiúsculas (tal como o correspondente ângulo esférico interno). O lado que se opõe a um vértice representa-se pela letra minúscula correspondente (Fig. 1.4).

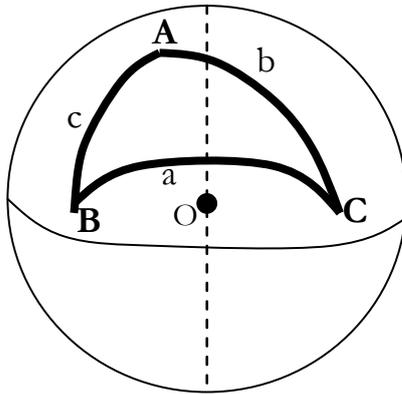


FIGURA 1.4 - Triângulo Esférico [ABC].

1.3 Fórmulas da trigonometria esférica

A resolução de triângulos esféricos, ou seja a determinação dos três lados e dos três ângulos internos, faz uso das denominadas fórmulas da trigonometria esférica cuja demonstração faremos nesta secção. Esta demonstração assenta no produto interno e externo de vectores, no presente caso escrito na forma cartesiana. Neste sentido começaremos por definir um sistema de coordenadas esféricas (sistema naturalmente adaptado à estudo na esfera) e sua transformação no sistema cartesiano.

1.3.1 Sistema de coordenadas esféricas

O sistema de coordenadas esféricas é um sistema directo (ou seja a coordenada medida no plano XOY cresce no sentido anti-horário), com origem em O. Um qualquer ponto P fica univocamente determinado pelo conhecimento ternário (r, θ, ϕ) , respectivamente coordenadas radial, polar e azimutal, representados na figura 1.5.

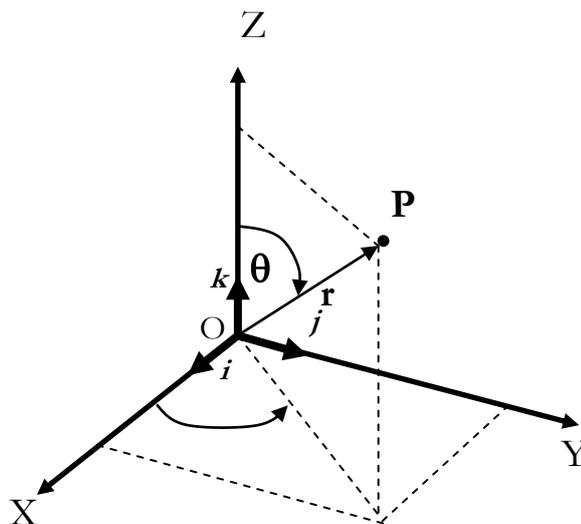


FIGURA 1.5 - Sistema de coordenadas esféricas.

As coordenadas esféricas têm o seguinte intervalo de variação :

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \\ 0^\circ \leq \varphi < 360^\circ \end{cases}$$

Posto isto, estabelece-se agora a transformação de coordenadas entre os sistemas esférico e cartesiano (e vice-versa):

$$x = r \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

e

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\theta = \text{arc cos } [z \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}]$$

$$\varphi = \text{arc tg } (y/x), x \neq 0$$

Assim, o vector OP pode ser escrito da forma seguinte:

$$OP = \vec{r} = (r \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \varphi) \vec{i} + (r \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \varphi) \vec{j} + (r \cdot \cos \theta) \vec{k} \quad (1)$$

1.3.2 Fórmula Fundamental da Trigonometria Esférica

Para a demonstração da fórmula fundamental da trigonometria esférica recorreremos à seguinte figura 1.6:

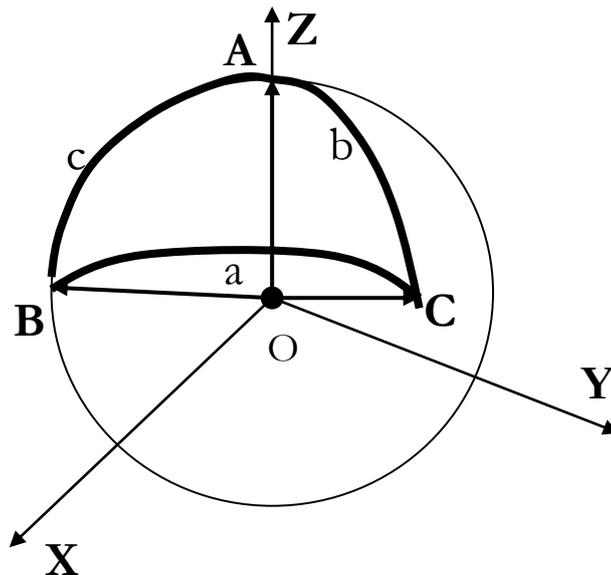


FIGURA 1.6 - Sistema de eixos cartesianos centro na esfera.

Três pontos A,B e C estão sobre uma esfera de raio unitário de tal forma que o ponto A está sobre o eixo OZ e o ponto B pertence ao plano XOZ.

Assim sendo os vectores OA, OB e OC são, respectivamente,

$$\begin{cases} OA = \bar{k} \\ OB = (\sin c)\bar{i} + (\cos c)\bar{k} \\ OC = (\sin b \cdot \cos A)\bar{i} + (\sin b \cdot \cos A)\bar{j} + (\cos b)\bar{k} \end{cases} \quad (1a)$$

Note-se que a projecção de OB sobre o plano XOY está sobre o eixo OX (e portanto o valor da sua coordenada azimutal é nula). Por outro lado, o valor da coordenada azimutal do vector OC é igual ao ângulo esférico em A.

Calculando, seguidamente, o produto interno de OB por OC temos

$$\begin{aligned} OB \times OC &= \|OB\| \cdot \|OC\| \cos(OB \hat{\cdot} OC) \\ \sin c \cdot \sin b \cdot \cos A + \cos c \cdot \cos b &= \cos a \end{aligned} \quad (2)$$

Note-se que OB e OC são vectores unitários e o ângulo entre estes dois vectores não é à mais do que o ângulo ao centro cujo arco é a . Sendo que se trata de uma esfera de raio unitário, a amplitude do ângulo ao centro é igualmente a .

A fórmula (2), também chamada “fórmula dos cossenos”, põe em evidência o cálculo de uma lado do triângulo à custa dos outros dois lados e do ângulo que se lhe opõe. A forma apresentada representa uma das concretizações possíveis da fórmula fundamental da trigonometria esférica. Permutando os lados e os ângulos num triângulo esférico, podem ser encontradas mais duas formas desta fórmula. Esta fórmula tem uma enorme aplicação pelo facto de permitir calcular a distância entre dois locais à superfície da Terra (considerada esférica) pelo conhecimento das coordenadas geográficas desses locais (ver secção 1.3.7)

1.3.3 Fórmula da analogia dos senos

Para a demonstração da próxima fórmula iremos calcular o produto externo entre os vectores OC e OB (nesta ordem).

$$OC \times OB = \|OC\| \cdot \|OB\| \sin(OC \hat{\cdot} OB) \hat{l} \quad (3)$$

Onde o vector \hat{l} é o versor, simultaneamente, perpendicular aos vectores OC e OB e $(OC \hat{\cdot} OB)$ representa o ângulo entre os vectores OC e OB cuja amplitude, tal como vimos anteriormente, é igual a a .

Operando os vectores OC e OB de acordo com o que está explícito no sistema (1a) fica claro que lado esquerda da equação (3) é igual a

$$\begin{aligned} &(\sin b \sin A \cos c)\bar{i} + (\cos b \sin c - \cos c \sin b \cos A)\bar{j} - \\ & - (\sin b \sin A \sin c)\bar{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Represente-se, agora, por D um ponto situado sobre a esfera, que resulta da intersecção de um eixo com origem em O e simultaneamente perpendicular a aos vectores OC e OB (Fig. 1.7).

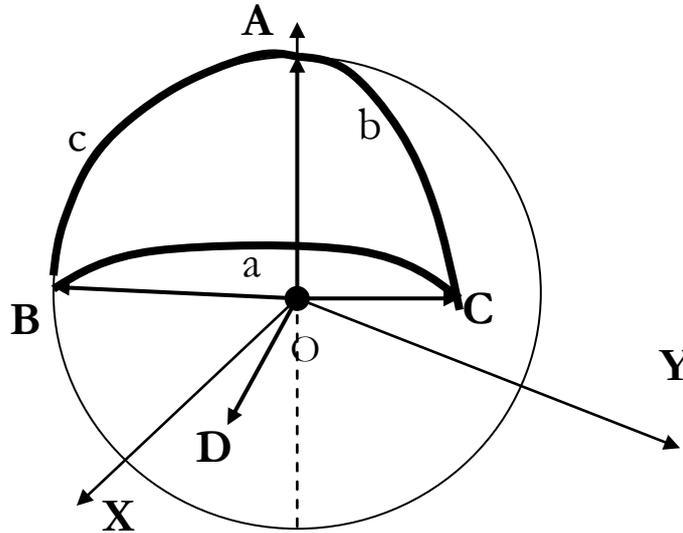


FIGURA 1.7 - O segmento [OD] é perpendicular a [OC] e a [OB].

Do anterior temos imediatamente que

$$OD = \vec{l}$$

Por outro lado, escrevendo OD em função das suas coordenadas polar concluímos que $(r, \theta, \varphi) = (1, \text{arco AD}, \text{ângulo esférico BAD})$. Assim, por (1) temos que

$$\vec{l} = (\sin AD \cos BAD)\vec{i} + (\sin AD \sin BAD)\vec{j} + (\cos AD)\vec{k} \quad (5)$$

Considere-se, agora, o triângulo esférico definido pelos vértices (A,D,B), figura 1.8,

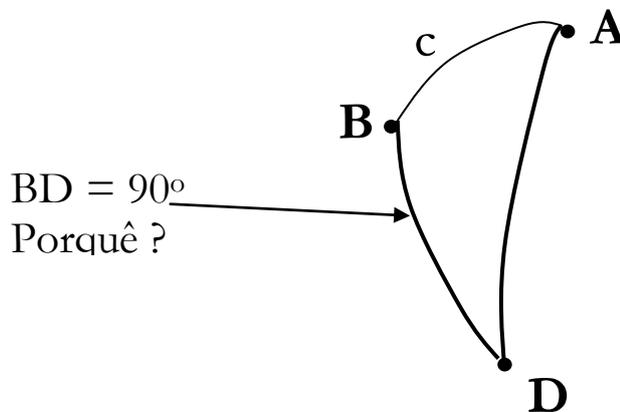


FIGURA 1.8 - O triângulo esférico [ADB]. O arco BD é igual a 90°.

Pela fórmula fundamental da trigonometria esférica, podemos escrever

$$\begin{aligned}\cos AD &= \cos c \cos(90^\circ) + \sin c \sin(90^\circ) \cos(90^\circ + B) = \\ &= -\sin c \sin B \quad (6)\end{aligned}$$

Porém, note-se que por (5) se pode concluir que $(-\sin c \sin B)$ é igual à componente segundo OZ do versor l . Igualando posteriormente os termos segundo o eixo OZ do lado direito e esquerdo da equação (3), resulta que

$$\begin{aligned}-\sin b \cdot \sin c \cdot \sin A &= \sin a \times (-\sin c \cdot \sin B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin b \cdot \sin A &= \sin a \cdot \sin B\end{aligned}$$

Daqui resulta a fórmula da analogia dos senos da trigonometria esférica, que na sua forma habitual, se escreve como:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (7)$$

Ou seja, num triângulo esférico, o quociente do seno de um ângulo pelo seno do lado que se lhe opõe é uma constante. Note-se por curiosidade que, também, há um fórmula da analogia dos senos (exactamente com este nome) na trigonometria plana, onde o seno do lado é substituído pelo comprimento do lado.

1.3.4 Fórmula dos cinco elementos

Se recuperarmos agora o triângulo esférico descrito na figura 1.8 e aplicando a recém demonstrada fórmula da analogia dos senos, podemos concluir que

$$\frac{\sin BAD}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + B)}{\sin AD} \Leftrightarrow \sin BAD \cdot \sin AD = \cos B$$

Note-se que $(\cos B)$ é igual à componente segundo OY do versor l . De uma forma similar ao que foi feito anteriormente, igualando os termos segundo o eixo OY do lado direito e esquerdo da equação (3), resulta que

$$\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A = \sin a \cdot \cos B \quad (8)$$

Esta fórmula é conhecida pela fórmula dos cinco elementos, já que faz envolver 3 lados e 2 ângulos. A forma apresentada representa uma das concretizações possíveis desta fórmula. A permutando dos lados e dos ângulos num triângulo esférico, podem ser encontradas mais 5 formas.

Com vista à memorização da fórmula dos 5 elementos mnemónica que visa permitir descobrir a sequência dos lados e ângulos. Para caso da

forma escrita em (8) (e começando no membro da direita da igualdade) a figura abaixo ilustra a pretendida sequência **aBbcbcA**. Figura 1.9:

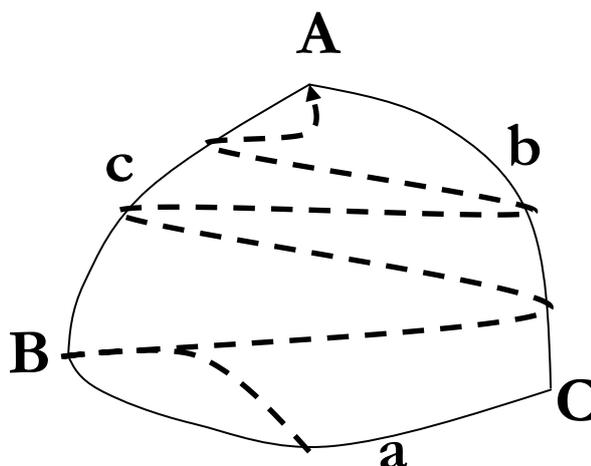


FIGURA 1.9 - A fórmula dos cinco elementos: $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

1.3.5 Fórmula dos quatro elementos consecutivos

A demonstração para esta fórmula está baseada na manipulação de expressões trigonométricas tendo como base as fórmulas da trigonometria esférica demonstradas anteriormente.

Consideramos a fórmula fundamental da trigonometria esférica aplicada consecutivamente aos lados b e c do triângulo esférico e posteriormente a fórmula da analogia dos senos aos ângulos B e C (por exemplo figura 1.8). Assim,

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (9a)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad (9b)$$

$$\sin c \sin B = \sin b \sin C \quad (9c)$$

Se se substituir $(\cos c)$, de (9b), e $(\sin c)$, de (9c), na equação (9a) vem:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \\ &+ \sin a \sin b \sin C \cot B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos b - \cos^2 a \cos b &= \sin a \sin b (\cos a \cos C + \\ &+ \sin C \cot B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 a \cos b &= \sin a \sin b (\cos a \cos C + \\ &+ \sin C \cot B) \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos da equação anterior pela quantidade $(\sin a \sin b)$ e re-arranjando a apresentação da equação, temos por fim,

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B \quad (10)$$

Esta fórmula, bem que (provavelmente) menos usada do que as anteriores, pode ser de grande utilidade em certas situações já que envolve quatro elementos consecutivos de um triângulo esférico: ângulo - lado - ângulo - lado (ou vice-versa). Por exemplo (ver figura 1.9), ângulo B, lado a, ângulo C, lado b. Nesta sequência seja C denominado de um ângulo interno e a um lado interno (uma vez que os elementos extremos serão B e b). A seguinte mnemónica pode ajudar a memorizar as várias formas possíveis da fórmula dos quatro elementos consecutivos (quantas ?):

$\cos(\text{lado interno}) \cos(\text{ângulo interno}) = \sin(\text{lado interno}) \cot(\text{lado extremo}) - \sin(\text{ângulo interno}) \cot(\text{ângulo externo})$, Figura 1.10:

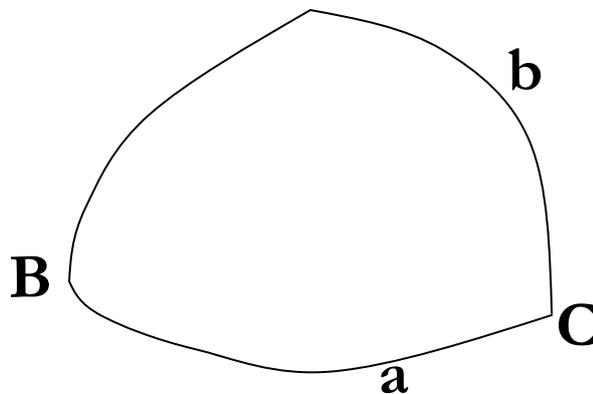


FIGURA 1.10 - A fórmula dos quatro elementos consecutivos: $\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B$.

1.3.6 Discussão

Temos assim demonstradas e apresentadas as quatro fórmulas da trigonometria esférica (2), (7), (8) e (10) que abaixo de resumem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \sin c \cdot \sin b \cdot \cos A + \cos c \cdot \cos b \quad (2) \\ \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (7) \\ \sin a \cdot \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (8) \\ \cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B \quad (10) \end{array} \right.$$

de lados e ângulos de um triângulo esférico. Há contudo uma condição necessária para que esta determinação seja possível: é necessário conhecer à partida pelo menos 3 desses elementos (dois lados e um ângulo, três lados, dois ângulos e um lado ou os três ângulos). Este facto tem uma outra consequência, a resolução de um dado triângulo esférico

nunca necessita de utilização das quatro fórmulas. A maior parte dos problemas são resolvidos pelo uso de duas ou três fórmulas.

1.3.7 Navegação ortodrómica: aplicação das fórmulas da trigonometria esférica

No que segue iremos fazer uma aplicação das fórmulas da trigonometria esférica no contexto da chamada navegação ortodrómica (navegação ao longo do arco de círculo máximo).

A problema consiste na determinação da distâncias e um ponto particular de uma rota entre dois locais da Terra, de coordenadas geográficas conhecidas.

Comecemos por recordar a definição de coordenadas geográficas, na sua forma simplificada (Terra como esfera de raio = 6378 km). Trata-se de um sistema de coordenadas esféricas (directo) em que o equador é um círculo máximo perpendicular ao eixo pólo norte (PN) – pólo sul (PS). O Equador divide a Terra em dois hemisférios.

Na esfera terrestre podemos ainda identificar mais dois elementos muito importantes: os paralelos - círculos menores paralelo ao equador, e os meridianos - círculos máximos perpendicular ao equador. De entre estes últimos o meridiano de Greenwich ocupa um papel de destaque pelo facto de ser a referência para a contagem das longitudes (Fig. 1.11).

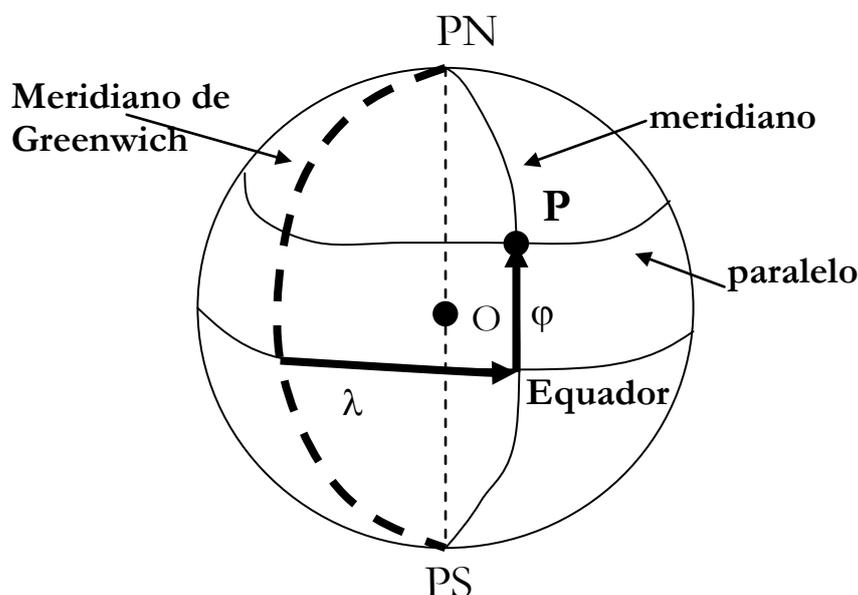


FIGURA 1.11 - Sistema de coordenadas geográficas.

A posição de um qualquer ponto à superfície da Terra fica perfeitamente definida pelo conhecimento das duas coordenadas angulares (φ , λ):

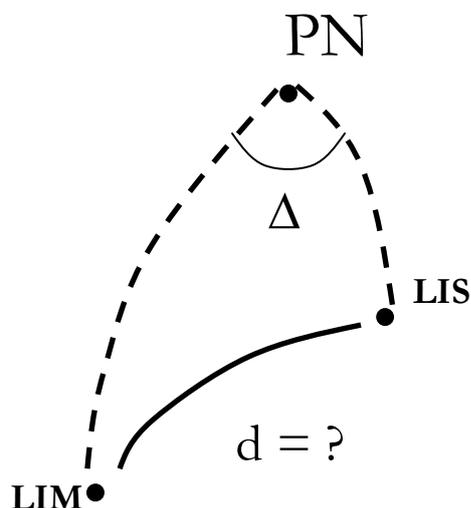
Latitude (φ): distância angular entre o equador e o ponto P. $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Por convenção, temos: se o ponto se encontra no hemisfério norte, $\varphi > 0^\circ$.

Longitude (λ): distância angular, no equador, entre o meridiano de Greenwich (meridiano de referência) e o meridiano do ponto. Por convenção, usa-se também $0^\circ < \lambda \leq 180^\circ$ se o ponto se encontra a este de Greenwich e $-180^\circ \leq \lambda < 0^\circ$ se o ponto se encontra a oeste. É, também, muito comum representar a longitude de um local em horas, minutos e segundos. Neste caso $0h < \lambda \leq 24h$, sendo que a contagem se faz (a partir do Meridiano de Greenwich) no sentido oeste.

Considere que se efectua uma viagem entre as cidades de Lima ($\varphi = 12^\circ 0' S$; $\lambda = 77^\circ 0' W$) e de Lisboa ($\varphi = 38^\circ 42' N$; $\lambda = 9^\circ 10' W$). Determine a distância, em km, entre as cidades;

Resolução:

Consideremos que as coordenadas de Lima e Lisboa se podem representar respectivamente por $(\varphi_{LIM}; \lambda_{LIM})$ e por $(\varphi_{LIS}; \lambda_{LIS})$. A situação do exercício pode ser esquematizada na seguinte triângulo esférico (LIM,PN,LIS):



Aplicando a fórmula fundamental ao lado LimLis temos:

$$\cos (LimLis) = \cos (PNLim) \cos (PNLis) + \sin (PNLim) \sin (PNLis) \cos (\Delta)$$

$$\text{Mas } (PNLim) = 90^\circ - \varphi_{LIM} \text{ e } (PNLis) = 90^\circ - \varphi_{LIS} \text{ e } \Delta = \lambda_{LIS} - \lambda_{LIM}$$

Assim:

$$\cos d = \sin \varphi_{LIM} \sin \varphi_{LIS} + \cos \varphi_{LIM} \cos \varphi_{LIS} \cos (\lambda_{LIS} - \lambda_{LIM}).$$

Ter atenção que $\varphi_{LIM} < 0$.

Substituindo vem $d = 80^\circ 55'$. Para transformar d em km temos $D = d \times 2\pi R_T / 360^\circ = 9007 \text{ km}$.

Capítulo 2. Sistemas de coordenadas celestes

Erggerti un trono vicino al sol

(I acto de Aida, Giuseppe Verdi, 1871)

Tal como vimos, a esfera celeste é um local, imaginário e sem dimensões, onde estão projectadas as posições dos astros. Na esfera celeste (para já) a distância ao astro é irrelevante e a sua posição fica definida unicamente à custa de duas coordenadas angulares.

Tal como no posicionamento à superfície da Terra, as coordenadas celestes exigem um plano fundamental (ex: na Terra, o equador) e um vertical de referência (ex: na Terra, o Meridiano de Greenwich), figura 2.1.

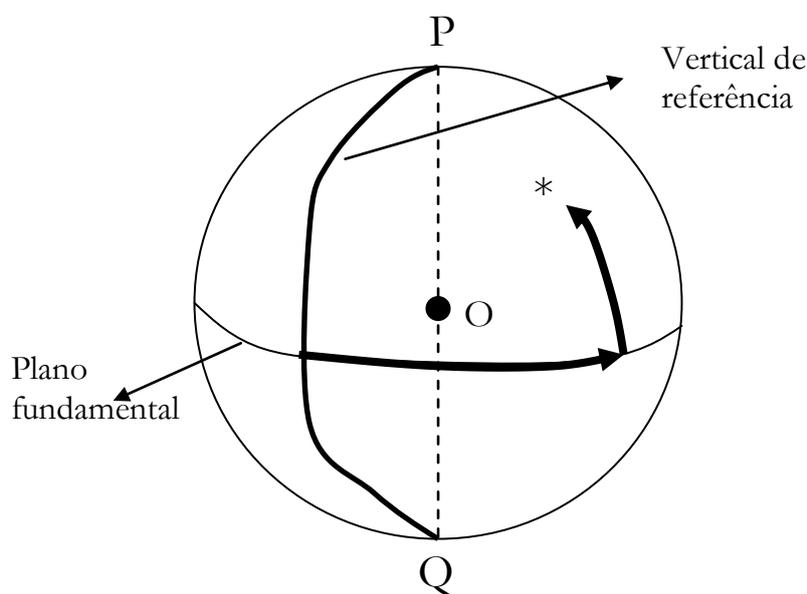


FIGURA 2.1 - Sistema de coordenadas celestes.

2.1 Sistema de coordenadas horizontais locais

O presente sistema é, por assim dizer, o mais “natural”. Natural no sentido em que está mais próximo da intuição do observador posicionado à superfície da Terra. Este sistema tem no plano do horizonte o seu elemento principal. O horizonte é representado por um plano tangente à Terra num dado local e é a fronteira entre as duas regiões da esfera celeste que contém os objectos visíveis e invisíveis ao observador. A perpendicular ao horizonte num local de observação define-se pela linha zénite-nadir (Fig. 2.2):

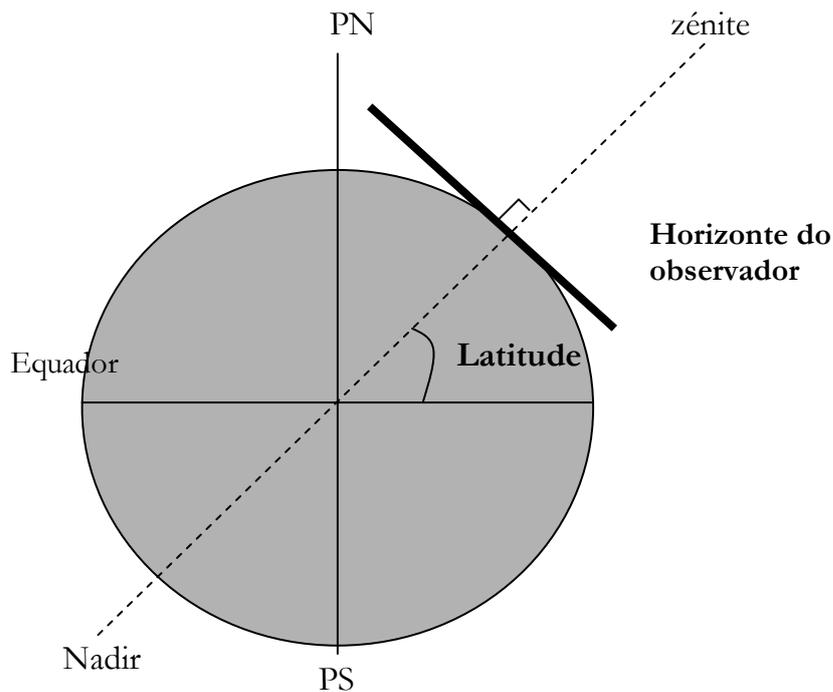


FIGURA 2.2 - O horizonte como plano perpendicular à Terra, no local.

A posição na esfera celeste pode assim ser definida por um par de coordenadas esféricas azimute (A) e pela altura (h), assim definidas:

Azimute (A): distância angular, no horizonte, entre o meridiano do lugar (a norte do observador) e o vertical do astro. $0^\circ \leq A < 360^\circ$. O azimute pode também ser expresso em horas.

Altura (h): distância angular entre o horizonte e o paralelo do astro. $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$. Por convenção, se o astro se encontra acima do horizonte (portanto visível) então $h > 0$. Na figura abaixo estão representados o azimute e a altura (Fig. 2.3):

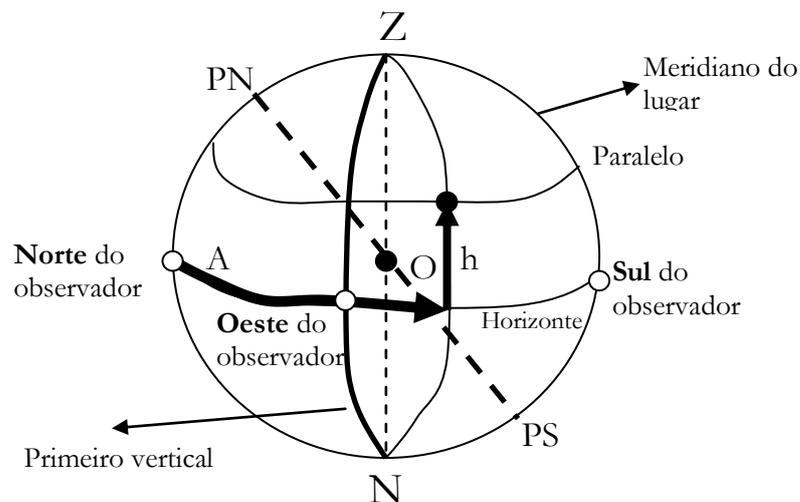


FIGURA 2.3 - Sistema de Coordenadas Horizontal Local.

A análise desta figura merece alguns comentários adicionais:

- A amplitude do arco de círculo máximo definido entre o zénite (Z) e o pólo norte corresponde ao complementar da latitude do lugar;
- Por seu turno, a amplitude do arco de círculo máximo definido entre o pólo norte e o norte do Observador corresponde ao latitude do lugar;
- Ao círculo máximo, perpendicular ao horizonte, que passa pelo oeste e este do Observador chama-se primeiro vertical;
- Define-se norte e sul do Observador como as intersecções do meridiano do lugar com o horizonte;
- Define-se distância zenital (representada por “z”) ao complementar da altura (h);
- Este sistema de coordenadas é directo.

2.2 Sistema de Coordenadas Equatoriais Horárias

No caso de se escolher o equador celeste (cujo plano coincide com o plano do equador terrestre) como plano fundamental a posição de um astro pode ser definida pelo ângulo horário (H) e pela declinação (δ) definidos da seguinte forma (Fig. 2.4):

Ângulo Horário (H): distância angular, no equador (contada do sentido retrógrado), entre o meridiano do lugar e o vertical do astro. $0^\circ \leq H < 360^\circ$. O ângulo horário pode também ser expresso em horas.

Declinação (δ): distância angular entre o equador e o paralelo do astro. $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$. Por convenção se o astro se encontra acima do equador, então $\delta > 0$.

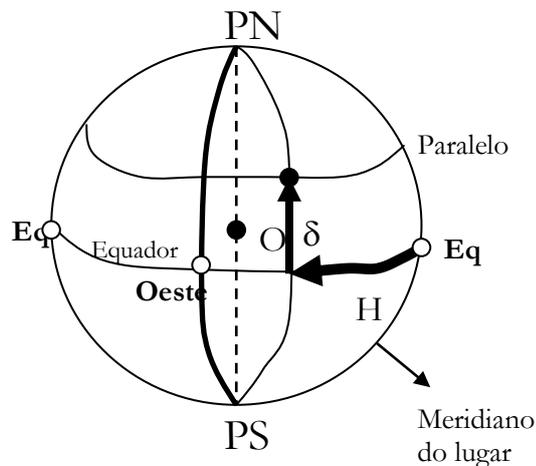


FIGURA 2.4 - Sistema de coordenadas Equatorial Horário.

Este sistema apresenta uma vantagem relativamente ao sistema horizontal que resulta da declinação não depender do local de observação. Ao contrário, tal como o azimute, o ângulo horário depende do observador uma vez que depende do meridiano do lugar. Note-se que da mesma forma que o equador celeste não é mais do que a projecção, na esfera celeste, do equador terrestre, o PN celeste é a intersecção do prolongamento do PN terrestre com a esfera celeste.

2.3 Sistema de Coordenadas Equatoriais Uranográficas (ou celestes)

O sistema anterior apresentou uma coordenada, a declinação, invariante ao local de observação. Assim, seria de extrema utilidade um sistema cujas duas coordenadas não dependessem do local de observação.

Esse sistema poderá ser o Equatorial Uranográfico com equador celeste como plano fundamental e a ascensão recta (α) e pela declinação (δ) como coordenadas:

Ascensão Recta (α): distância angular, no equador, entre o vertical do ponto vernal e o vertical do astro. $0\text{o} \leq \alpha < 360\text{o}$. A ascensão recta pode também ser expressa em horas. Define-se Ponto Vernal como ponto na esfera celeste definida pela direcção Terra-Sol no Equinócio da Primavera (~21 de Março). O ponto vernal é, em primeira aproximação, fixo relativamente ao movimento de rotação da Terra (Fig. 2.5)

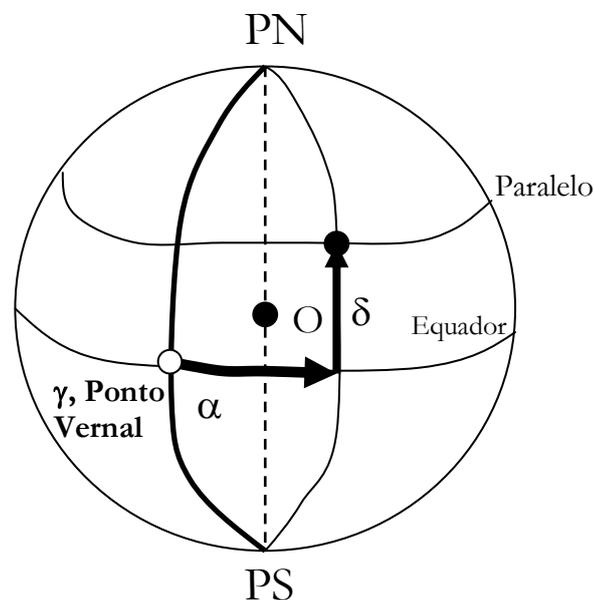


FIGURA 2.5 - Sistema de coordenadas Equatorial Uranográfico.

Este novo sistema de coordenadas apresenta a clara vantagem de não estar, em primeira aproximação, dependente do local de observação. Os catálogos fundamentais de estrelas apresentam as posições estelares definidas pela ascensão recta e declinação (eg. Wielen et al 2000)..

2.4 Sistema de Coordenadas Eclípticas

A Eclíptica define-se como o plano de translação do sistema Terra-Lua em torno do Sol. Em primeira aproximação este plano coincide com o plano orbital da Terra.

Constata-se que os planetas do Sistema Solar têm os seus planos orbitais praticamente coincidentes com a eclíptica. Assim a eclíptica é também um plano fundamental natural e as coordenadas correspondentes são a latitude e longitude celestes (Fig. 2.6):

Longitude celeste (λ): distância angular, na eclíptica (contada do sentido directo), entre o vertical do ponto vernal e o vertical do astro. $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$. A longitude pode também ser expressa em horas.

Latitude celeste (β): distância angular entre a eclíptica e o paralelo do astro. $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$. Por convenção, se o astro se encontra a norte da eclíptica tem $\beta > 0$.

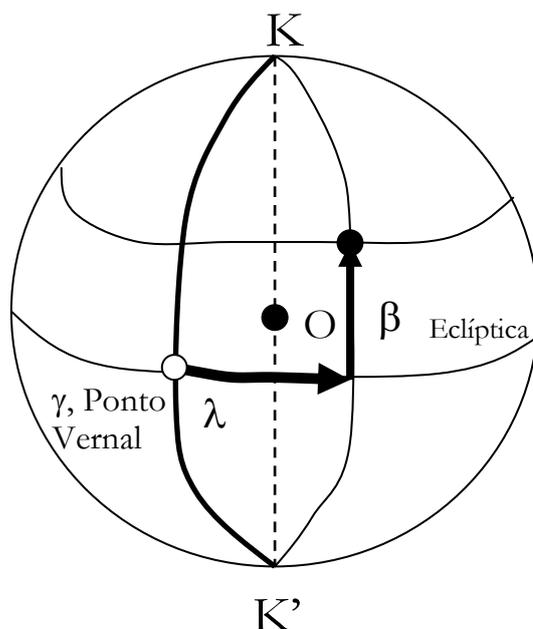


FIGURA 2.6 - Sistema de coordenadas eclípticas.

Onde K e K' são, respectivamente, os pólos norte e sul da eclíptica

A eclíptica não é paralela ao plano do equador (terrestre/celeste). Estes dois planos fazem um ângulo de $\approx 23^\circ.5$, a obliquidade da eclíptica ϵ (Fig. 2.7).

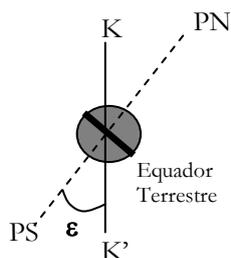


FIGURA 2.7 - Os eixos de rotação da terra e KK' fazem, um ângulo de $23^\circ.5$ – a obliquidade.

A obliquidade da eclíptica é responsável pela existência de fenómenos como as estações do ano ou a variação da declinação do Sol.

Por outro lado num referencial geocêntrico, o Sol move-se na eclíptica e portanto $\beta = 0$ (Fig. 2.8). A declinação varia (ao longo do ano) entre $-23^{\circ}5'$ e $+23^{\circ}5'$. Neste movimento podemos identificar quatro pontos especiais:

- Equinócio de Primavera, $\alpha=0^{\circ}$ e $\delta = 0^{\circ}$
- Equinócio de Outono, $\alpha=180^{\circ}$ e $\delta = 0^{\circ}$
- Solstício de Verão, $\alpha=90^{\circ}$ e $\delta = 23^{\circ}.5'$
- Solstício de Inverno, $\alpha=270^{\circ}$ e $\delta = - 23^{\circ}.5'$

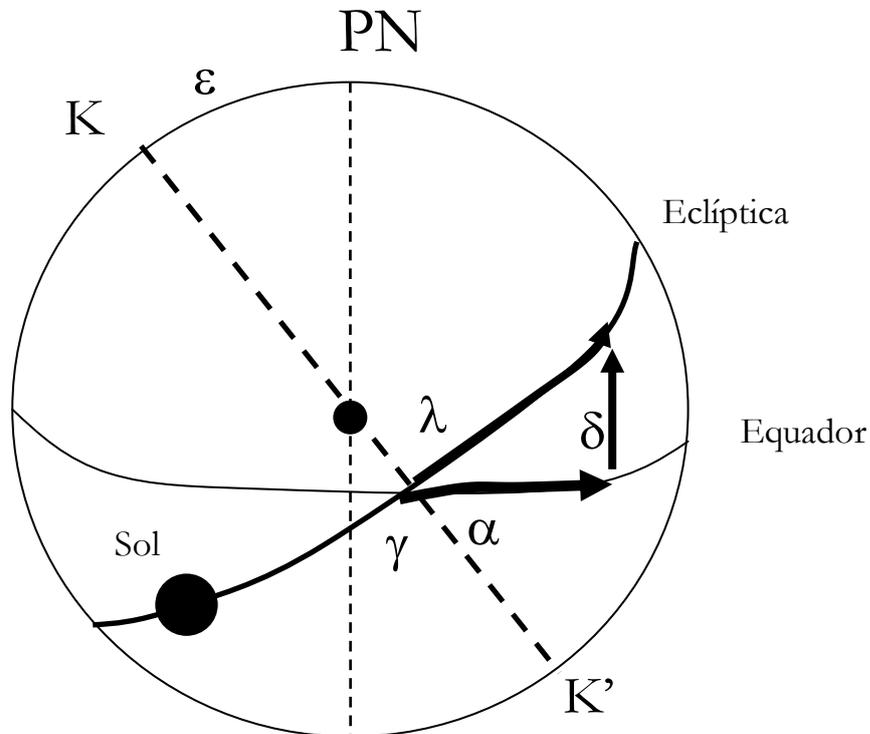


FIGURA 2.8 - Trajecto aparente do Sol na esfera celeste.

A zona do firmamento observável à a partir da Terra varia com o movimento anual. Independentemente das causas, constata-se que o Sol se move ao longo do ano entre as constelações num movimento, que num sistema de coordenadas equatoriais, mostra ser uma sinusóide, que não é mais do que a projecção da eclíptica, no plano da esfera celeste.

Há por isso as “Constelações de Verão” (tais como Hércules ou a Lira) e “Constelações de Inverno” (de que são exemplo Orion e Perseus), figura 2.9.

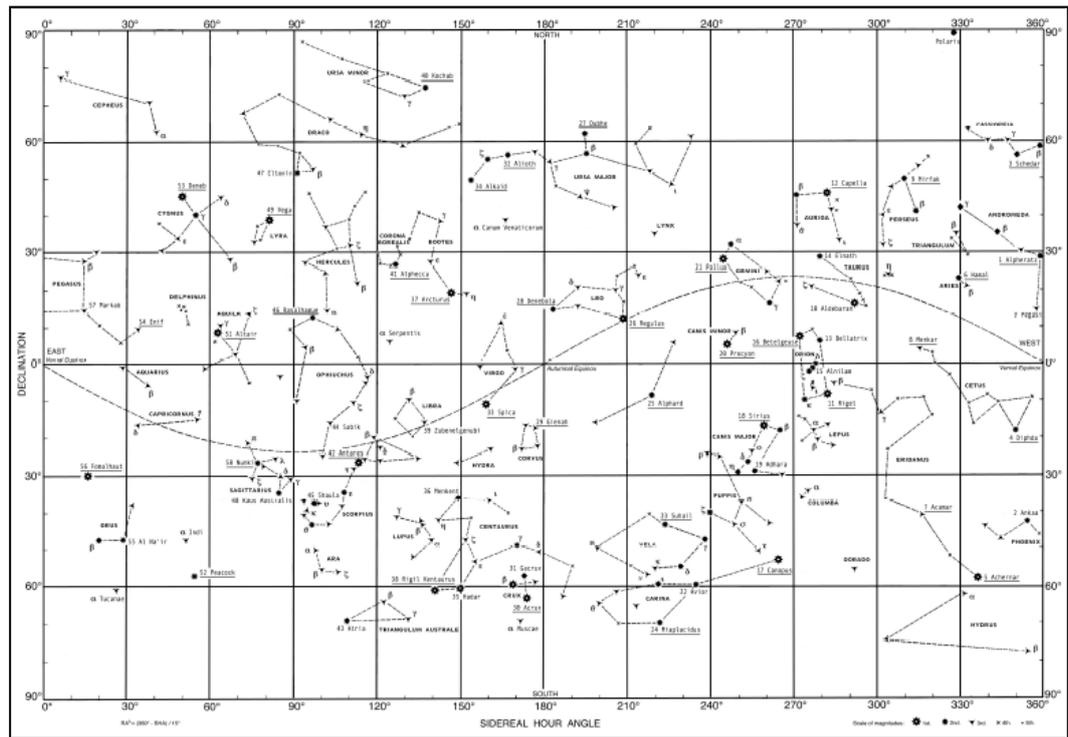


FIGURA 2.9 – A eclíptica e as constelações.

2.5 Métodos de transformação de coordenadas entre sistemas

Pretende resolver-se o seguinte problema: conhecendo as coordenadas de um astro num determinado sistema (por exemplo, horizontal local) calcular as coordenadas desse astro num outro qualquer sistema (por exemplo, equatorial horário). Vários são os métodos que permitem dar resposta a este problema.

Nós iremos explorar as equações da trigonometria esférica. Este método baseia-se na construção e posterior resolução de um triângulo esférico que ponha em evidência, para um mesmo ponto da esfera celeste, as coordenadas de um sistema e de outro.

2.5.1 Transformações entre os sistemas Horizontal Local e Equatorial Horário:

$(A, h) \rightarrow (H, \delta)$

Tomemos como exemplo a transformação de coordenadas horizontais (A, h) - frequentemente, as observáveis) em equatoriais horárias (H, δ) .

Sejam os dois sistemas com o mesmo centro (Fig. 2.10)

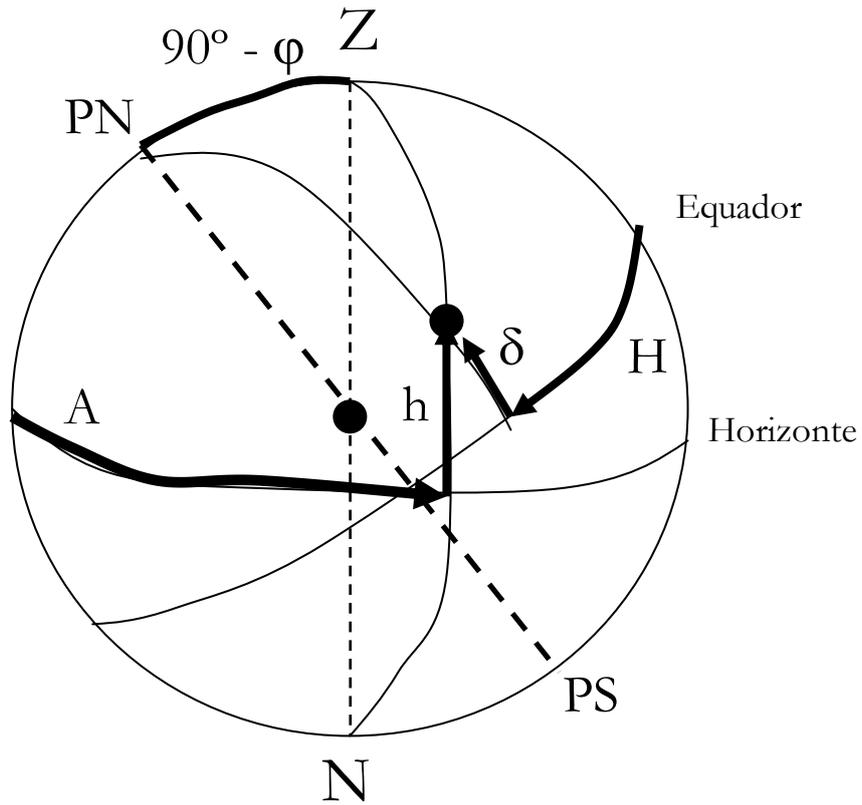


FIGURA 2.10 - Transformação entre os sistemas horizontal local e equatorial horário.

Seja o triângulo esférico cujos vértices são PN, Z e astro (Fig. 2.11):

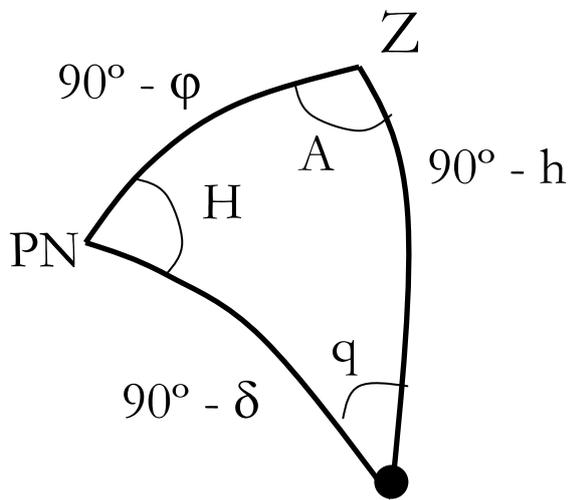


FIGURA 2.11 - Triângulo esférico de enorme utilidade: [PN Z astro].

O ângulo em PN é H e em Z é A. Ao ângulo no astro, q, dá-se o nome de ângulo paralático.

A aplicação das fórmulas da trigonometria esférica a esta triângulo conduz a :

- Fundamental da trigonometria esférica

$$\text{sen } \delta = \text{sen } h \text{ sen } \varphi + \text{cos } h \text{ cos } \varphi \text{ cos } A$$

- Analogia dos senos

$$\text{cos } \delta \text{ sen } H = \text{cos } h \text{ sen } A$$

- Cinco elementos

$$\text{cos } \delta \text{ cos } H = \text{sen } h \text{ cos } \varphi - \text{cos } h \text{ sen } \varphi \text{ cos } A$$

O conhecimento das coordenadas equatoriais, à custa das coordenadas locais pressupõe o conhecimento da latitude do lugar. A declinação fica determinada pela primeira equação (porque a altura é um ângulo do I ou do IV quadrante) mas o ângulo horário, fica indeterminado por simples resolução de uma das outras duas equações restantes (já que o ângulo horário pode tomar valores entre 0 e 360°). Apesar de haver duas incógnitas, são necessárias três equações para levantar a ambiguidade natural das funções circulares.

A transformação inversa $(A, h) \leftarrow (H, \delta)$, obtém-se tão só pela aplicação de fórmulas semelhantes aos elementos adequados do mesmo triângulo esférico.

2.5.2 Transformações entre os sistemas Uranográfico e Eclíptico: $(\alpha, \delta) \rightarrow (\lambda, \beta)$

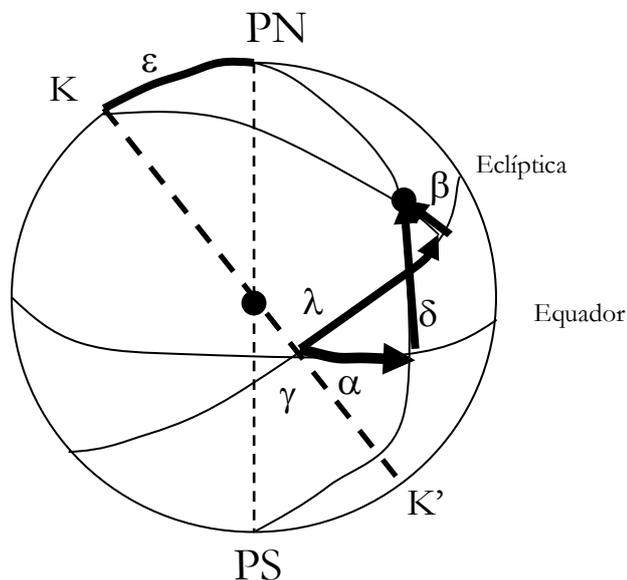


FIGURA 2.12 - Transformação entre os sistemas eclíptico e equatorial uranográfico.

Da figura 2.12 pode concluir-se que o arco PNK tem o valor da obliquidade da eclíptica. Seja, então, o triângulo esférico cujos vértices são PN, K e astro (Fig. 2.13).

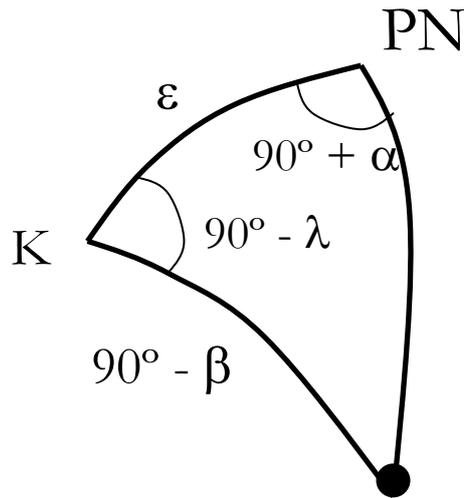


FIGURA 2.13 Triângulo esférico [PN K astro].

O ângulo em PN é $90^\circ + \alpha$ e em K é $90^\circ - \lambda$. Assim os respectivo sistema de transformação de coordenadas vem:

- Fundamental da trigonometria esférica

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \delta \cos \epsilon - \cos \delta \text{sen } \epsilon \text{sen } \alpha$$

- Analogia dos senos

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$

- Cinco elementos

$$\cos \beta \text{sen } \lambda = \text{sen } \delta \text{sen } \epsilon + \cos \delta \cos \epsilon \text{sen } \alpha$$

Capítulo 3. Movimento diurno dos astros

Dilegua, o notte! Tramontate, stelle! All'alba vincerò!

(III acto de Turandot, Giacomo Puccini, 1926)

No capítulo discute-se algumas das propriedades do movimento aparente da esfera celeste e portanto do chamado movimento diurno dos astros. Serão estudados o nascimento e ocaso dos astros, o conseqüente tempo de visibilidade, as passagens meridianos ou culminação e a maior digressão. Este estudo faz-se na perspectiva de uma aplicação directa dos dois capítulos anteriores.

3.1 Duração da visibilidade de um astro ou o intervalo de tempo passado acima do horizonte

O movimento aparente dos astros faz-se de este para oeste (ao contrário do movimento de rotação da Terra). A figura abaixo ilustra o trajecto aparente de um astro na esfera celeste ao longo de 24 horas (o círculo diurno).

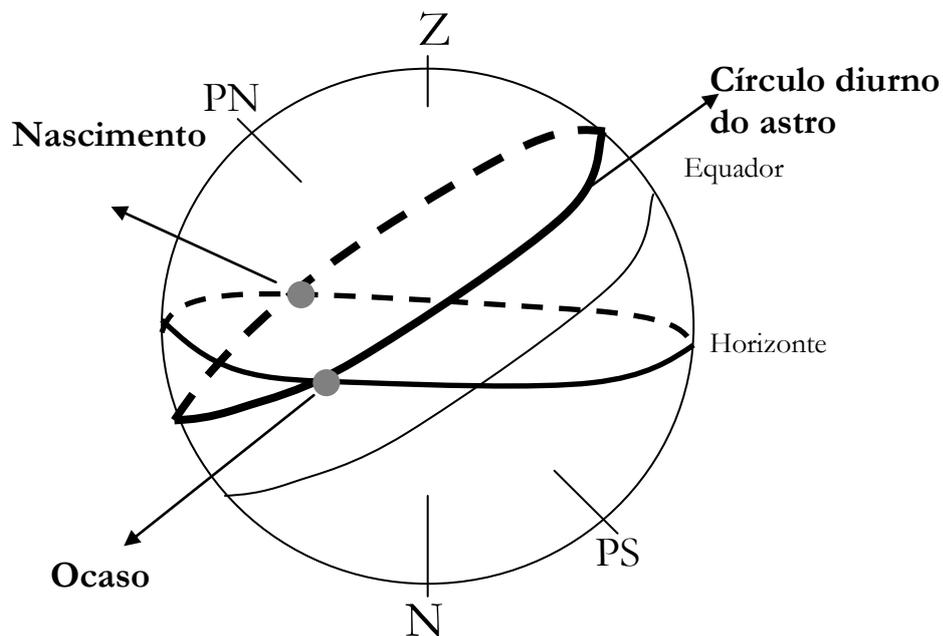


FIGURA 3.1 - Círculo diurno do astro: nascimento e ocaso.

Na figura 3.1 representa-se o círculo diurno de uma estrela de declinação positiva. Note-se que círculo diurno do astro (movimento aparente) é paralelo ao equador. O nascimento e o ocaso do astro são os pontos de intersecção do círculo diurno dos astros com o horizonte, portanto $h = 0$.

Sendo o ângulo horário uma grandeza medida ao longo do equador em relação ao meridiano do lugar, a sua variação diurna cresce à mesma velocidade angular do dia de 24 horas. Assim, a diferença numérica entre os ângulos horários do astro no ocaso e no nascimento corresponde exactamente ao período de tempo que o astro passa acima do horizonte, ou seja o tempo de visibilidade.

Para o cálculo dos valores do ângulo horário no nascimento e no ocaso seja o triângulo esférico para o nascimento/ocaso (Fig 3.2):

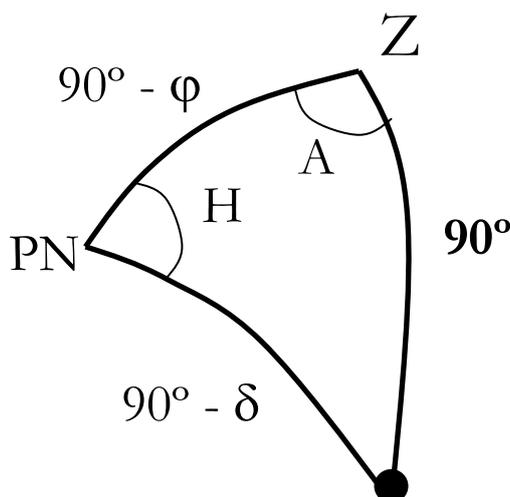


FIGURA 3.2 - Triângulo esférico para o nascimento ou ocaso.

Aplicando a fórmula fundamental ao lado [Z,astro] vem

$$\begin{aligned} \cos 90^\circ &= \cos(90^\circ - \delta) \cdot \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta) \cdot \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \cos H \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos H &= -\tan \delta \times \tan \varphi \end{aligned}$$

Os dois valores possíveis de H vão corresponder ao ângulo horário do nascimento (H_{NAS}) e do ocaso (H_{OC}). Qualquer que seja o valor da declinação do astro, temos que:

- Nascimento: $12h < H_{NAS} < 24h$
- Ocaso: $0h < H_{OC} < 12h$

Assim sendo, ângulo horário uma grandeza associada ao movimento de rotação da Terra, temos que o astro estará acima do horizonte durante $2 H_{OC}$.

Duração da visibilidade de um astro é então

$$2 \times H_{OC} = 2 \times \arccos(-\tan \delta \times \tan \varphi)$$

Estudemos agora a duração de visibilidade do Sol ao longo do ano, o que vem a dizer, a duração do dia num dado local ao longo do ano. Os resultados são generalizáveis a outros astros.

Para equador $\varphi = 0$ vem $2H = 12h$, independentemente do dia do ano. Para uma dada época do ano, portanto δ fixo, podemos detectar quatro situações, se :

- $\delta > 0$ e $\varphi > 0$ (hemisfério norte). Neste caso quanto maior for φ maior será H (\in II ou ao III Q.) e portanto maior a duração do dia;
- $\delta > 0$ e $\varphi < 0$ (hemisfério sul). Neste caso quanto maior for φ , em valor absoluto, menor será H (\in I ou ao IV Q.) e portanto menor a duração do dia (situação inversa da anterior);
- $\delta < 0$ e $\varphi > 0$ (hemisfério norte). Neste caso quanto maior for φ menor será H (\in I ou ao IV Q.) e portanto menor a duração do dia;
- $\delta < 0$ e $\varphi < 0$ (hemisfério sul). Neste caso quanto maior for φ , em valor absoluto, maior será H (\in II ou ao III Q.) e portanto maior a duração do dia (situação inversa da anterior);

Aplicação:

Calculemos a duração do dia para Coimbra = $2 \times \arccos [-\text{tg} (40^\circ 11' 52'',57) \times \text{tg} \delta]$ onde a declinação do Sol varia ao longo do ano, $-23^\circ.5 \leq \delta \leq 23^\circ.5$.

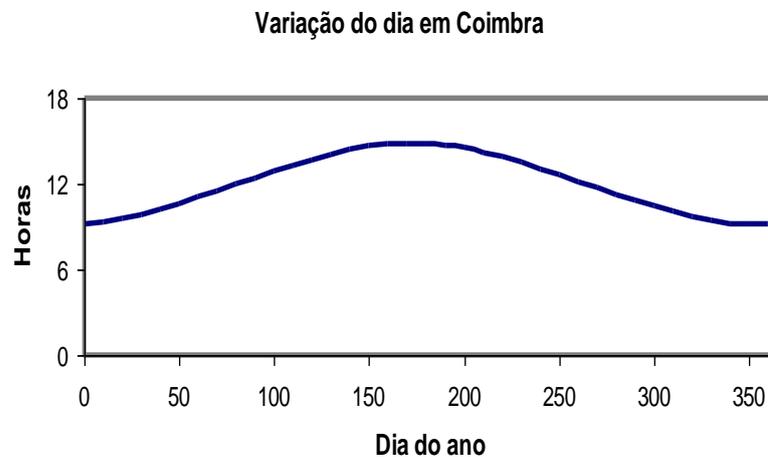


FIGURA 3.3 - Variação da duração do dia em Coimbra ao longo de um ano.

O valor da declinação do Sol ao longo do ano, pode, em primeira aproximação, ser obtida pela fórmula

$$\delta_{SOL} = 23.45 \text{sen} \left[\frac{360}{365} (284 + n) \right]$$

com n o número de dias contados desde 1 de Janeiro.

3.2 Astros circumpolares

Um astro circumpolar define-se por não ter nascimento e/ou ocaso (numa dada latitude), figura 3.4. Esta terminologia de “circumpolar” é frequentemente usada para as estrelas.

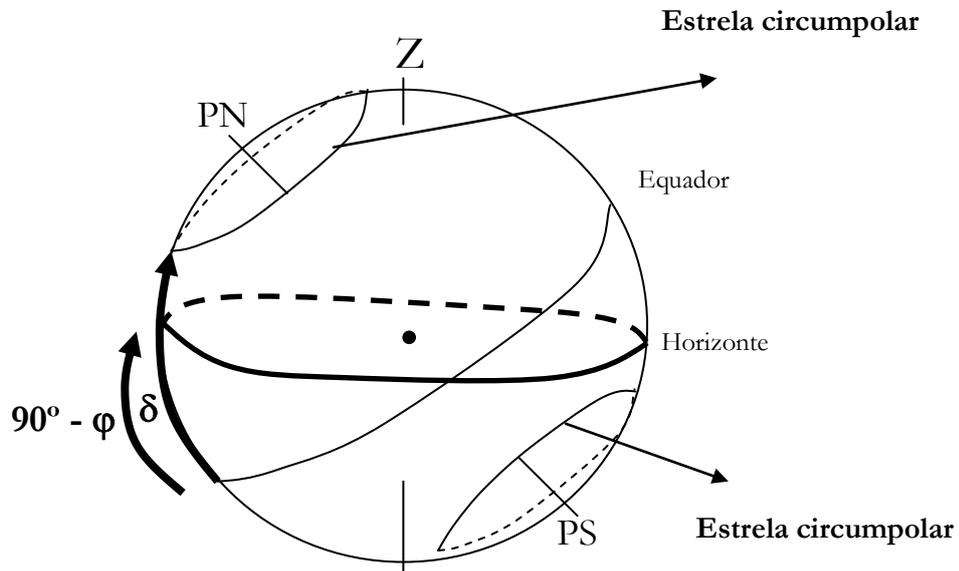


FIGURA 3.4 - Condição de circumpolaridade.

A estrela é circumpolar sse $|\delta| > 90^\circ - \varphi$. No pólo norte (ou sul) todos os astros são circumpolares. Ao contrário, no equador, não há astros circumpolares.

3.3 Passagem meridiana ou culminação

A passagem meridiana ou culminação define-se pela intersecção do círculo diurno da estrela com o meridiano do lugar (Fig. 3.5):

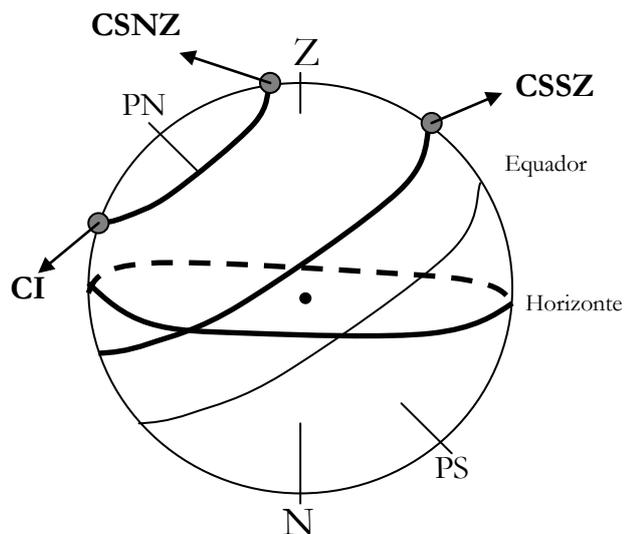


FIGURA 3.5 - As culminações (ver texto).

Em que:

- CSNZ, culminação superior a norte do zénite ($A=0^\circ$)
- CSSZ, culminação superior a sul do zénite ($A=180^\circ$)
- CI, culminação inferior

3.3 Passagem no primeiro vertical

Tal como definido o primeiro vertical é perpendicular ao horizonte e passa pelos pontos este e oeste do observador (Fig. 3.6).

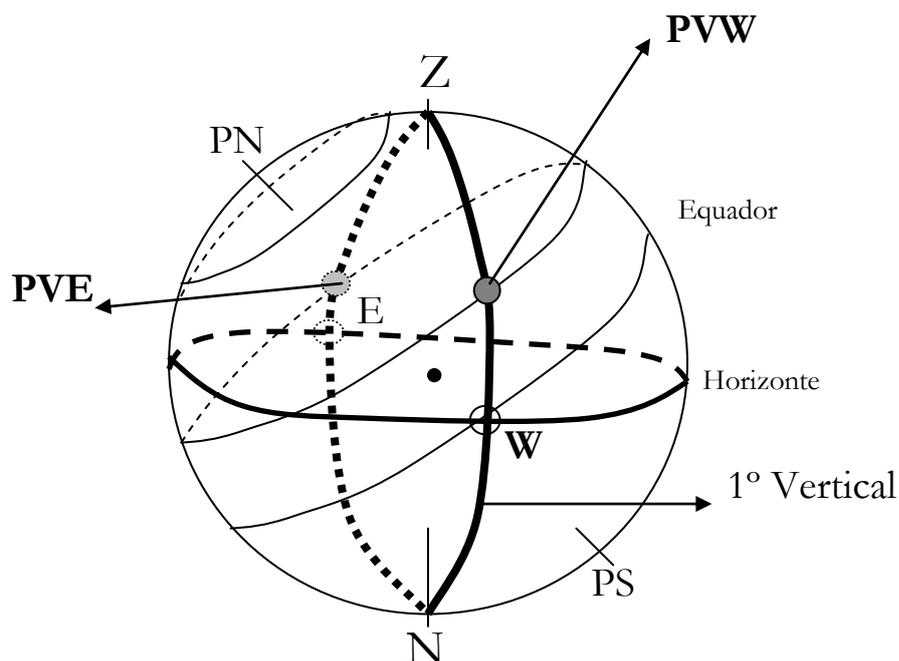


FIGURA 3.6 - Passagem no primeiro vertical: a oeste e a este.

Onde,

- PVW, Passagem no 1º vertical a oeste ($A=90^\circ$)
- PVE, Passagem no 1º vertical a este ($A=270^\circ$)

Note-se que o astro circumpolar representado na figura não intersecta o 1º vertical. Este resultado não é generalizável a qualquer astro circumpolar ou seja, ser circumpolar não é condição suficiente (nem necessária) para que haja intersecção do primeiro vertical pelo círculo diurno.

3.4 Maior digressão de um astro

A maior digressão da estrela corresponde ao ponto (P) do círculo diurno onde o azimute é máximo. Nesta situação, o ângulo paralático em P vale 90° . Para ilustrar a maior digressão, sejam as figuras 3.7 e 3.8.

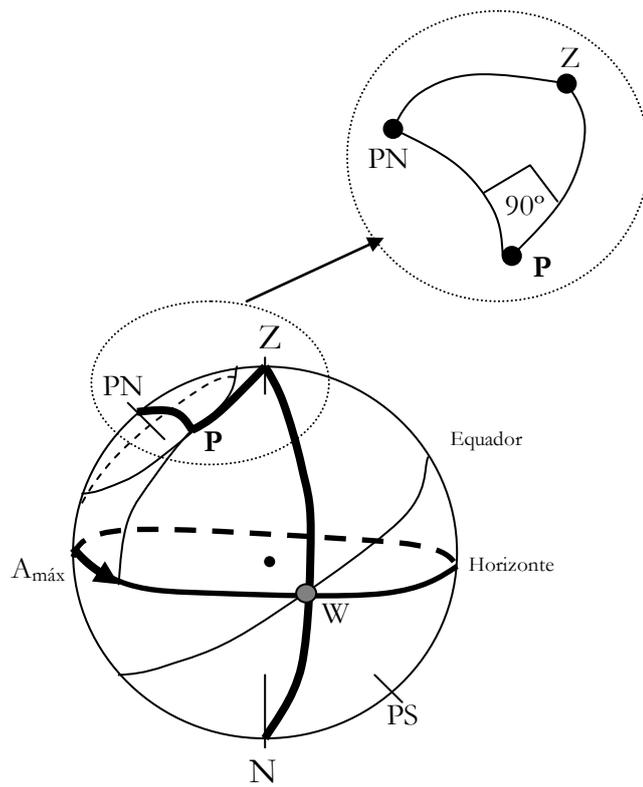


FIGURA 3.7 - Maior digressão de um astro.

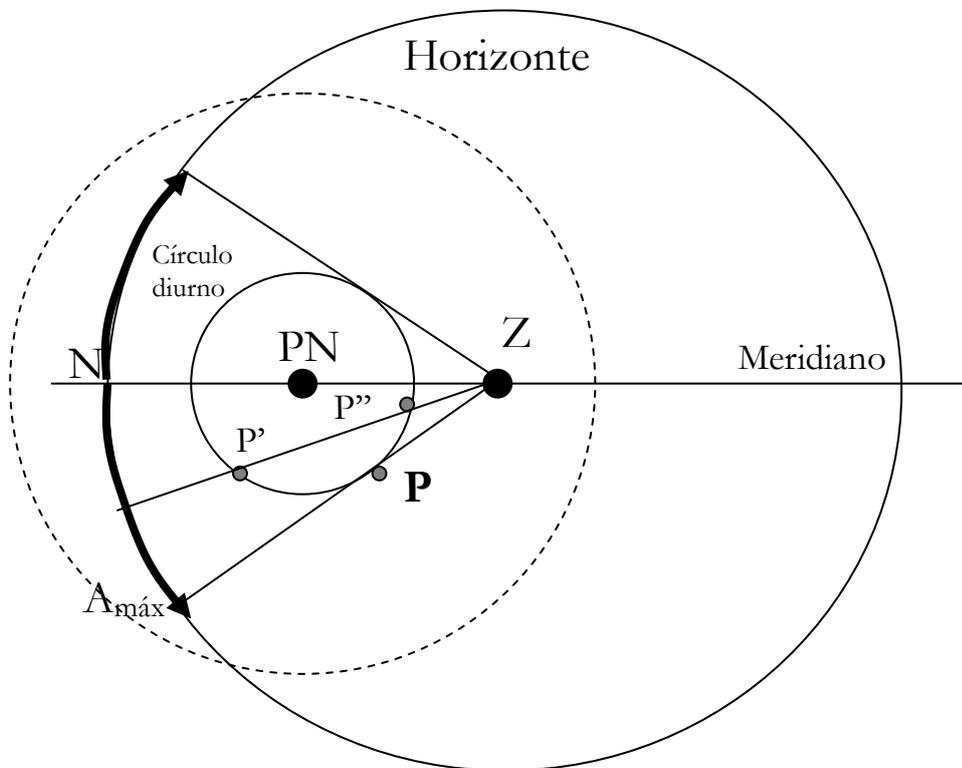


FIGURA 3.8 - Maior digressão: valor máximo do azimute: vista perpendicular ao plano do horizonte.

Note-se que

- Os pontos P' e P'' tem o mesmo azimute;
- O azimute do astro vai variar entre $[- \text{Amáx}, \text{Amáx}]$
- A arco ZP é tangente ao círculo diurno. Daí os arcos PNP e ZP serem perpendiculares em P
- Numa estrela com $CSSZ$ (círculo a tracejado) não faz sentido falar em maior digressão uma vez que o azimute da estrela cresce monotonamente entre 0° e 360°

Capítulo 4. Algumas propriedades do movimento aparente das estrelas: movimento anual e secular. Movimento próprio das estrelas.

E lucevan le stelle e olezzava la terra...

(III acto de Tosca, Giacomo Puccini, 1900)

Neste capítulo estuda-se o movimento aparente das estrelas provocadas por causas inerentes a movimento da Terra. Inclui-se ainda o tratamento do movimento próprio das estrelas.

4.1 Deslocamento aparente da estrela na esfera celeste

Nesta secção faremos o tratamento matemático do deslocamento aparente de uma estrela na esfera celeste devido a uma causa (para já) não especificada.

Seja a esfera celeste (sistema equatorial uranográfico), figura 4.1:

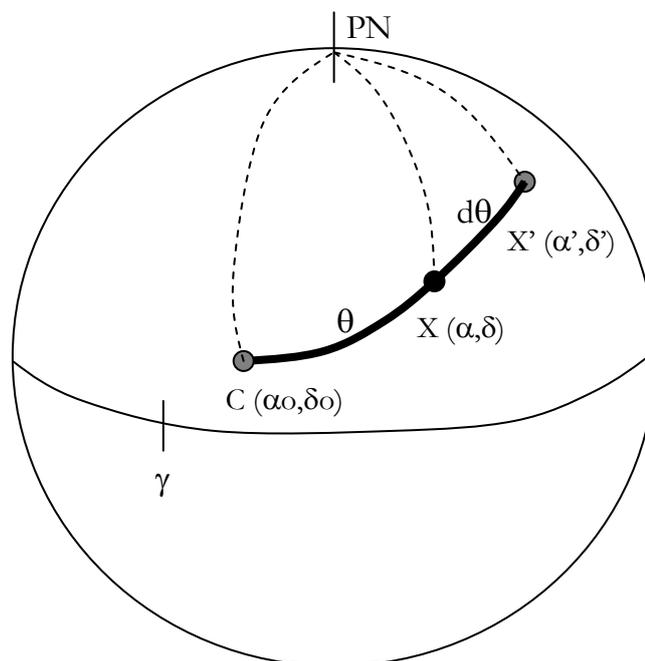


FIGURA 4.1 - Coordenadas uranográficas sujeitas a pequenas alterações.

Consideremos que, por uma determinada causa, a estrela se desloca na esfera celeste de $X(\alpha, \delta)$ para $X'(\alpha' = \alpha + d\alpha, \delta' = \delta + d\delta)$, ao longo de um arco de círculo máximo de amplitude $d\theta$. O arco anterior pertence ao círculo máximo

que contém o ponto $C (\alpha_0, \delta_0)$ de coordenadas conhecidas. Conhecendo as coordenadas em X deseja determinar-se X' , ou seja $d\alpha$ e $d\delta$.

Hipóteses:

$d\theta \sim \text{sen } \theta = f \times \text{sen } \theta$, onde f é uma constante que depende da causa que provoca o deslocamento do astro.

$d\alpha$ e $d\delta < 1^\circ$ (se $x < 1^\circ$ então $\text{sen } x \approx x$ e $\text{cos } x \approx 1$ com x em radianos).

Seja da figura anterior (Fig. 4.2):

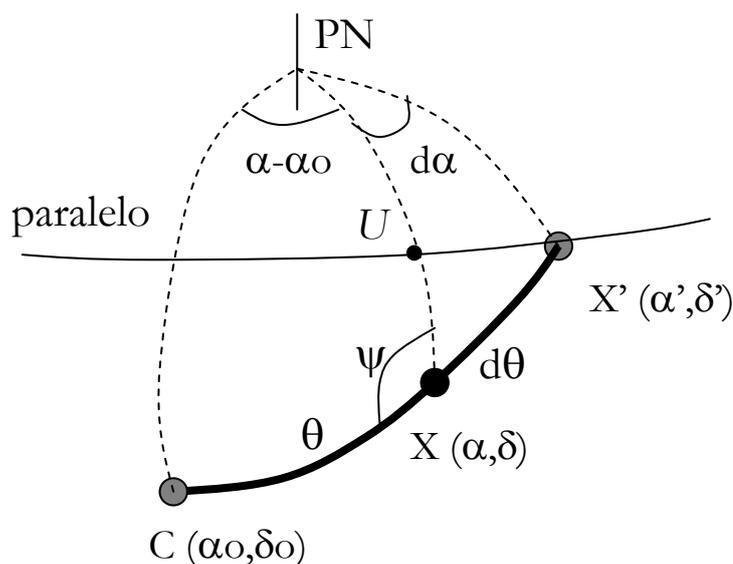


FIGURA 4.2. - Resolução do triângulo [PN C X].

Temos assim (e desprezando os termos de segunda ordem):

$$UX' = d\alpha \cdot \cos(\delta') = d\alpha \cdot \cos(\delta + d\delta) = d\alpha \cdot (\cos \delta \cos d\delta - \text{sen } \delta \text{sen } d\delta) \approx d\alpha \cdot (\cos \delta - \text{sen } \delta \cdot d\delta) = d\alpha \cdot \cos \delta - \text{sen } \delta \cdot d\alpha \cdot d\delta = d\alpha \cdot \cos \delta + O(2) \approx d\alpha \cdot \cos \delta$$

Por outro lado:

$$UX = (90^\circ - \delta') - (90^\circ - \delta) = d\delta$$

Por outro lado, sendo o triângulo [UXX'] constituído por lados de amplitude muito mais pequenos que 1° podemos aproximar este triângulo pelo correspondente triângulo plano. Assim,

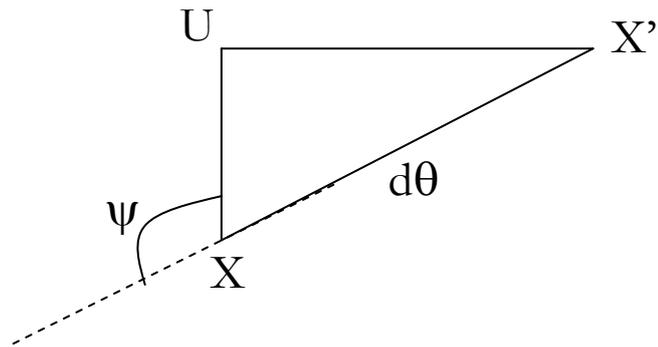


FIGURA 4.3 - Um triângulo [UXX'] quase ... plano.

$$UX' = d\theta \cdot \text{sen } \psi \text{ e } UX = -d\theta \cdot \text{cos } \psi$$

Portanto

$$UX' = f \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \psi \text{ e } UX = -f \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \psi$$

E assim

$$d\alpha \cdot \text{cos } \delta = f \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \psi \text{ e } d\delta = -f \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \psi$$

Ainda,

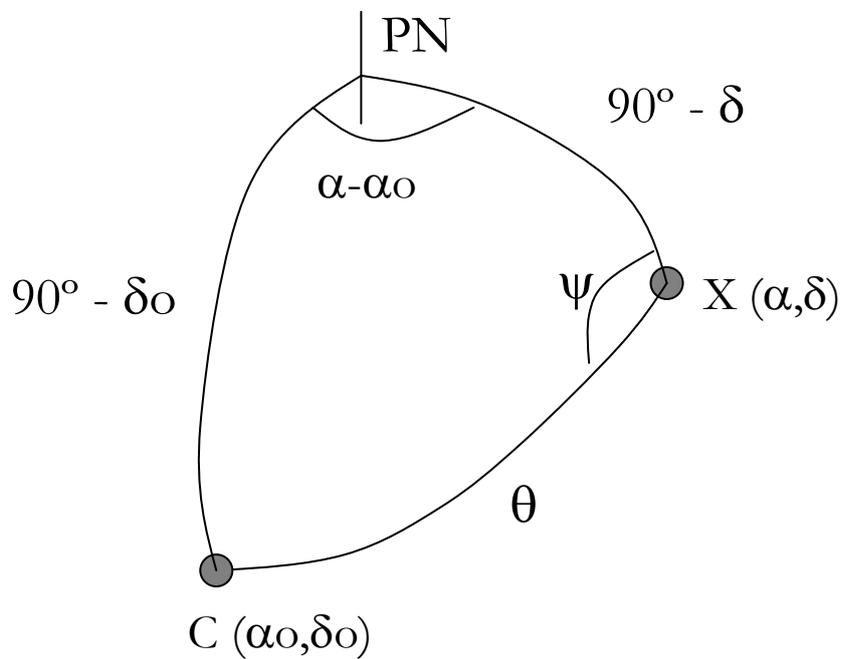


FIGURA 4.4 - O triângulo [CPNX].

Pela fórmula da analogia dos senos:

$$\text{sen } \theta \cdot \text{sen } \psi = \text{sen } (\alpha - \alpha_0) \text{cos } \delta_0$$

Pela fórmula dos 5 elementos

$$\text{sen } \theta \cos \psi = \text{sen } \delta \cos \delta - \cos \delta \text{sen } \delta \cos (\alpha - \alpha_0)$$

Assim as fórmulas podem escrever-se como,

$$d\alpha = f \sec \delta \text{sen } (\alpha - \alpha_0) \cos \delta$$

$$d\delta = -f [\text{sen } \delta \cos \delta - \cos \delta \text{sen } \delta \cos (\alpha - \alpha_0)]$$

4.2 Paralaxe estelar e aberração anual

4.2.1 Paralaxe anual ou estelar

A paralaxe anual está relacionada com o movimento de translação da Terra em torno do Sol.

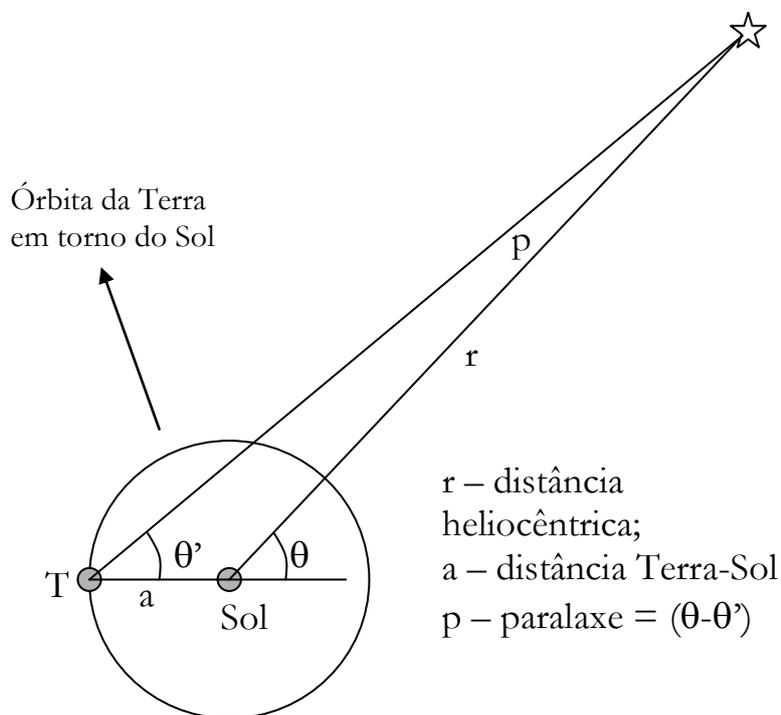


FIGURA 4.5 - Paralaxe anual.

Do triângulo [Estrela, Terra, Sol] vem,

$$\text{sen } p = (a/r) \text{sen } \theta'$$

O valor máximo de p será quando

$$\text{sen } p = (a/r)$$

Neste caso p toma o nome de paralaxe anual.

Da relação anterior decorrem dois importantes resultados:

- Medindo a paralaxe tem-se imediatamente o valor da distância à estrela;
- Quanto maior for a paralaxe menor é a distância.

Proxima Centauri, a estrela mais próxima da Terra depois do Sol, tem uma paralaxe de aproximadamente $0''.8$. É portanto o valor máximo de uma paralaxe.

Assim,

$$\text{sen } p = p \text{ (rad)} < 1^\circ. \text{ Portanto } p \approx (a/r).$$

Consideremos agora $a = 1$ unidade astronómica (UA) ≈ 150000000 km.

Assim,

$$p(\text{rad}) = (1/r), \text{ a distância à estrela é escrita em UA.}$$

Em termos práticos as paralaxes são medidas em segundo de arco. Assim,

$$p('') = 206265/r. \text{ Porquê?}$$

Define-se agora uma nova unidade de medida, o *parsec* (pc, “per seconds”). O pc é distância a que um objecto se teria que encontrar para ser observado com uma paralaxe de $1''$.

Assim,

$$1 \text{ pc} = 206265 \times 1 \text{ UA}$$

Neste caso podemos escrever,

$$p('') = 1/r(\text{pc}), \text{ em que } r \text{ vem expresso em pc.}$$

É usual designar pela letra π a paralaxe anual em segundos de arco.

Em 1989 foi lançado pela Agência Espacial Europeia o satélite espacial HIPPARCOS com a missão de (re)determinar a posição e distância a vários milhares de estrelas. O princípio da determinação da paralaxe em órbita é diferente do método seguido à superfície da Terra (Fig. 4.6)

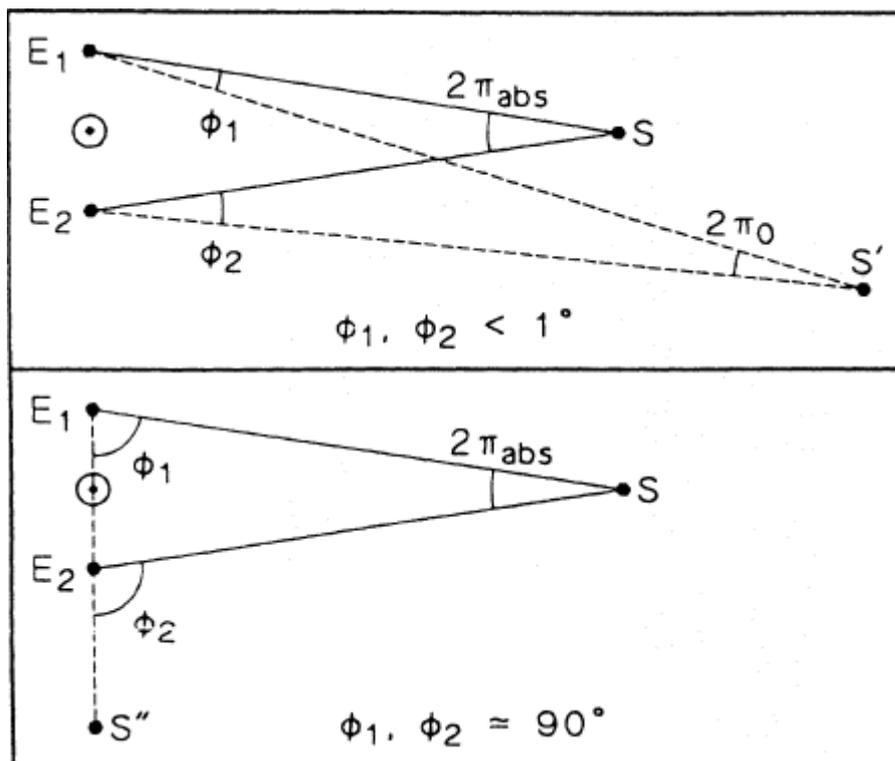


FIGURA 4.6 - Medição da paralaxe de Terra e no Espaço (Perryman et al 1995).

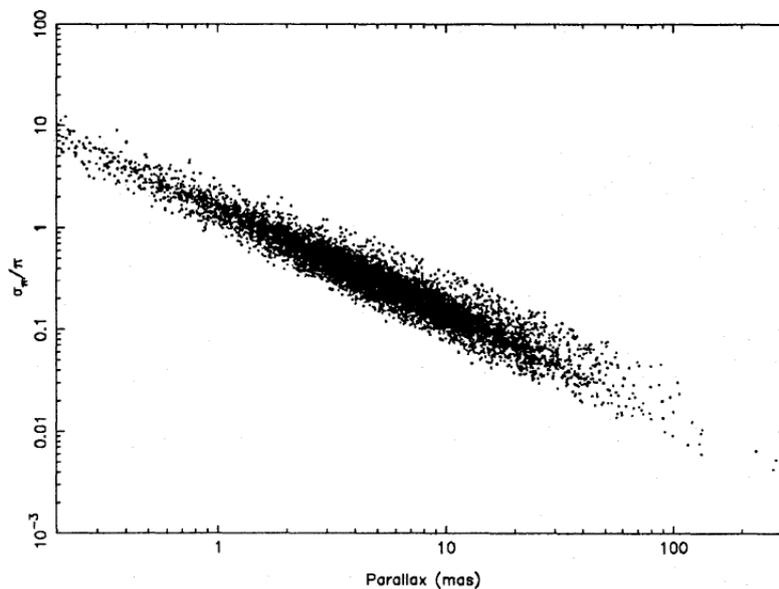


FIGURA 4.7 - Medição da paralaxe de Terra e no Espaço (Perryman et al 1995).

Por outro lado coloca em evidência o facto do erro na paralaxe ser cada vez maior quanto mais longe está a estrela. Os resultados aqui apresentados referem-se ao já satélite HIPPARCOS e mostram que a 100 pc (10 mas – milissegundos de arco), uma estrela pode ter um erro na paralaxe de 40%.

4.2.2 Efeito da paralaxe anual sobre as coordenadas de uma estrela.

A metodologia passa pela utilização das equações deduzidas anteriormente:

$$d\alpha = f \sec \delta \sin (\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0$$

$$d\delta = -f [\sin \delta_0 \cos \delta - \cos \delta_0 \sin \delta \cos (\alpha - \alpha_0)]$$

e pela determinação de $C(\alpha_0, \delta_0)$ e f .

Vejamus que a paralaxe provoca uma diminuição do ângulo θ na direcção do Sol. Assim $C(\alpha_0, \delta_0) = (\alpha_{SOL}, \delta_{SOL})$.

Quanto ao valor de f , vejamos que $p = d\theta = \pi \sin \theta'$ e no formalismo original $d\theta = f \times \sin \theta$. Assim,

$$f = -\pi, \text{ negativo porque } d\theta < 0$$

Portanto,

$$d\alpha = -\pi \sec \delta \sin (\alpha - \alpha_{SOL}) \cos \delta_{SOL}$$

$$d\delta = \pi [\sin \delta_{SOL} \cos \delta - \cos \delta_{SOL} \sin \delta \cos (\alpha - \alpha_{SOL})]$$

Por outro lado podemos estabelecer equações semelhantes para o caso do efeito da paralaxe sobre as coordenadas eclípticas.

$$d\lambda = f \sec \beta \sin (\lambda - \lambda_0) \cos \beta_0$$

$$d\beta = -f [\sin \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \sin \beta \cos (\lambda - \lambda_0)]$$

Da mesma forma

$$C(\lambda_0, \beta_0) = (\lambda_{SOL}, 0) \text{ e } f = -\pi$$

Portanto,

$$d\lambda = -\pi \sec \beta \sin (\lambda - \lambda_{SOL})$$

$$d\beta = -\pi \sin \beta \cos (\lambda - \lambda_{SOL})$$

Consideremos x e y os deslocamentos na esfera celeste paralelo e perpendicular à eclíptica, respectivamente, $x = d\lambda \cos \beta$ e $y = d\beta$. Uma pequena simplificação permite-nos obter:

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{(\pi \cdot \sin \beta)^2} = 1$$

Elipse paraláctica, que reproduz o movimento aparente da estrela ao longo do ano, no plano da eclíptica.

4.2.2 Aberração diurna

O efeito de aberração, na generalidade, é causado pelo facto do observador se encontrar em movimento relativamente a uma fonte de luz que se assume estar em repouso. Este efeito foi descoberto por Bradley em 1728 aquando de observações da estrela γ Draconis. Seja L1 o centro da lente de um telescópio e O1 a ocular:

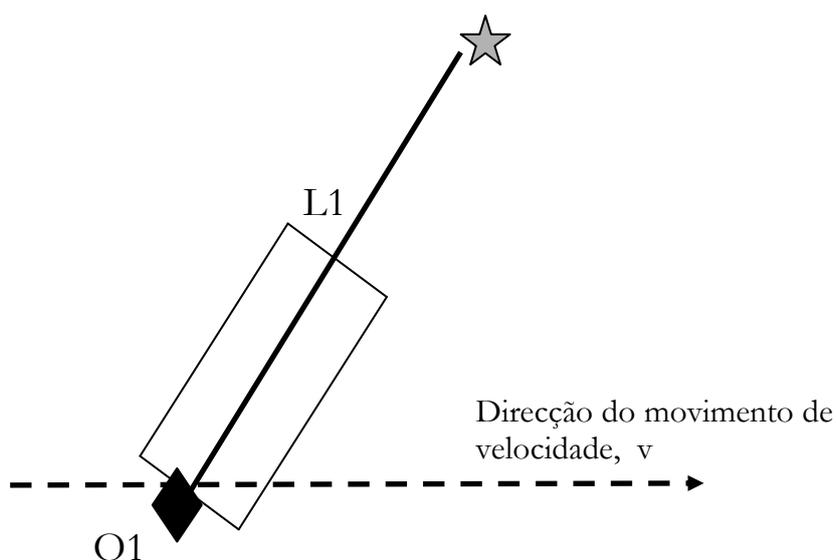


FIGURA 4.8 - Aberração: *observação* em movimento.

Se o telescópio estiver em movimento o astro vai ser observado em O2 e não em O1 uma vez que o curto espaço de tempo que a luz demorou a percorrer o tubo do telescópio, este moveu-se.

Assim, o astro vai ser observado (aparentemente) na direcção O1L1.

A aberração causa uma deslocamento aparente do astro no sentido do movimento.

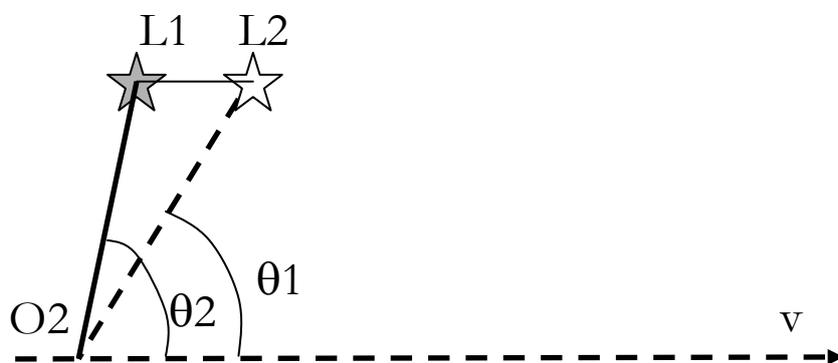


FIGURA 4.9 - A posição do astro é "artificialmente" alterada.

Mas,

$$\frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{L1L2} = \frac{\text{sen} \theta_1}{O2L1}$$

Em que t é o tempo que a luz demora a atravessar o tubo do telescópio e c a velocidade da luz.

Assim,

$$\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{v}{c} \text{sen} \theta_1$$

Para o movimento de translação da Terra (daí o nome de aberração anual) vem,

$$(\theta_2 - \theta_1) \leq 20'' .5$$

4.2.3 Efeito da aberração anual sobre as coordenadas de uma estrela

A metodologia passa igualmente pela utilização das equações

$$d\alpha = f \sec \delta \text{sen} (\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0$$

$$d\delta = -f [\text{sen} \delta_0 \cos \delta - \cos \delta_0 \text{sen} \delta \cos (\alpha - \alpha_0)]$$

E por isso a determinação de $C(\alpha_0, \delta_0)$ e f .

Temos que a aberração altera a posição do astro na direcção do movimento. Assim, a direcção é, em qualquer instante, perpendicular ao vector posição Sol-Terra:

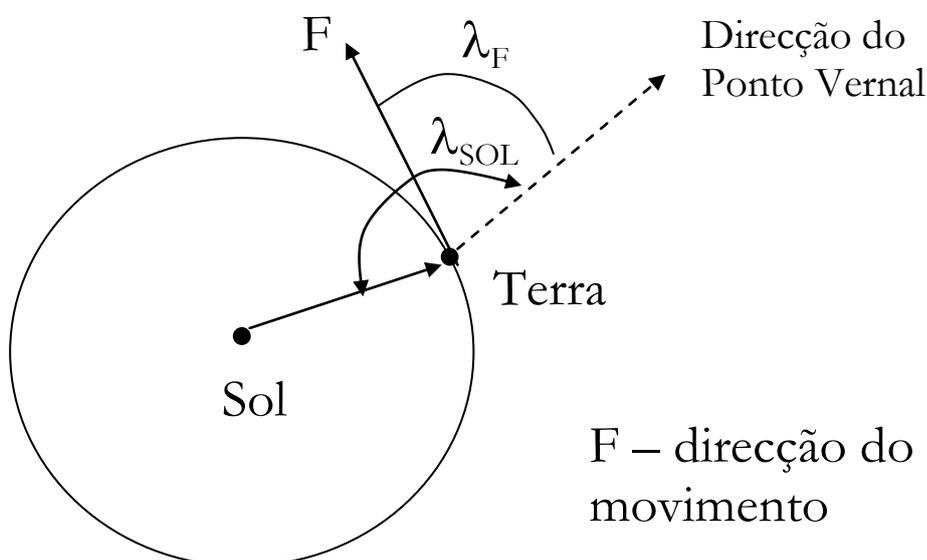


FIGURA 4.10. Movimento da Terra em torno do Sol provoca o efeito de aberração anual.

Vejamos que a aberração provoca uma diminuição do ângulo θ na direcção de F . Assim $C(\alpha_0, \delta_0) = (\alpha_F, \delta_F)$.

Quanto ao valor de f , temos de igual forma à aberração diurna, $f = -k$, negativo porque $d\theta < 0$

Portanto,

$$d\alpha = -k \sec \delta \sin(\alpha - \alpha F) \cos \delta F$$

$$d\delta = k [\sin \delta F \cos \delta - \cos \delta F \sin \delta \cos(\alpha - \alpha F)]$$

Por outro lado podemos estabelecer equações semelhantes para o caso do efeito da aberração sobre as coordenadas eclípticas.

$$d\lambda = f \sec \beta \sin(\lambda - \lambda o) \cos \beta o$$

$$d\beta = -f [\sin \beta o \cos \beta - \cos \beta o \sin \beta \cos(\lambda - \lambda o)]$$

Da mesma forma $C(\lambda F, \beta F) = (\lambda F, 0) = (\lambda \text{ SOL}-90^\circ)$ e $f = -k$

Portanto,

$$d\lambda = -k \sec \beta \cos(\lambda - \lambda \text{ SOL})$$

$$d\beta = k \sin \beta \sin(\lambda - \lambda \text{ SOL})$$

Tal como fizemos para a paralaxe anual, consideremos x e y os deslocamentos na esfera celeste paralelos e perpendiculares à eclíptica, respectivamente, $x = d\lambda \cos \beta$ e $y = d\beta$. Uma pequena simplificação permite-nos obter:

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{(k \cdot \sin \beta)^2} = 1$$

Elipse aberracional, que reproduz o movimento aparente da estrela ao longo do ano, no plano da eclíptica.

4.3 Movimentos seculares: precessão e nutação

4.3.1 Precessão luni-solar

Para além dos movimentos de rotação e translação, a Terra tem outros movimentos dignos de relevo.

É o caso do movimento secular do PN em torno do pólo da eclíptica, a precessão luni-solar, que tem como consequência o deslocamento do ponto vernal. Este efeito terá sido descoberto por Hipparchus de Niceia (séc II a. C), ao comparar a longitude celeste da estrela *Spica* com o mesmo valor obtido 144 anos antes por Timocharis e Aristillos.

Neste texto concentramo-nos sobre a precessão luni-solar. Este movimento resulta de um efeito no equador terrestre provocado pelas forças da Lua e do Sol. Na realidade, pelo facto da Terra ser achatada, a força gravítica, que age sobre o bojo da Terra mais próxima do Sol, vai ser maior que a correspondente força no bojo mais longínquo ($F_g \sim 1/r^2$). Por outro lado a força centrífuga que agirá sobre os dois bojós será menor no bojo mais próximo e maior no bojo mais afastado ($F_c \sim r$).

A força gravítica ($F = \frac{GMm}{r^2}$) exercida pelo Sol no equador terrestre vai ser diferencial. A força centrífuga sobre o equador terrestre ($F = mw^2r$), devido ao movimento de translação da Terra na sua órbita, também vai ser diferencial, mas em direcção oposta à da força gravítica.

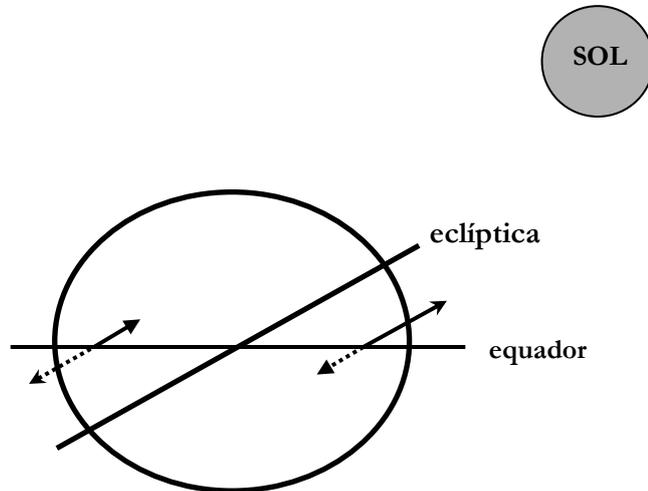


FIGURA 4.11 - Precessão luni-solar: conjugação de forças provoca um binário que actuar sobre o equador.

Assim, vai ser criado um binário sobre o equador terrestre que tende a levar este a coincidir com a eclíptica. No entanto, pelo facto da Terra se encontrar em rotação, cria-se uma força perpendicular à direcção das forças responsáveis pelo binário e o equador precessa, e portanto o PN precessa em torno do pólo da eclíptica. A precessão dá-se em sentido inverso ao do movimento de rotação da Terra. Embora na figura 4.11 apenas esteja referido o Sol, há igualmente um efeito da Lua na precessão do eixo de rotação da Terra.

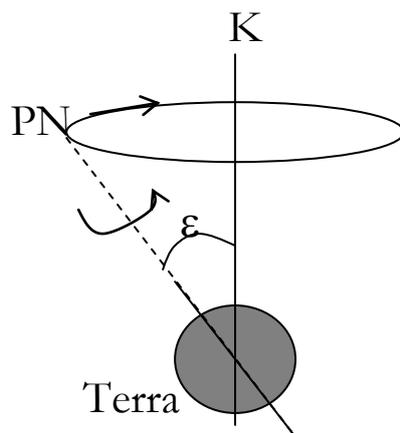


FIGURA 4.12 - O efeito da precessão do pólo terrestre em torno do pólo da eclíptica.

Uma das consequências mais importantes da precessão luni-solar é o atraso do ponto vernal a uma taxa anual de, aproximadamente, $50''.3$ por ano.

Por isso a precessão luni-solar é também conhecida por precessão dos equinócios.

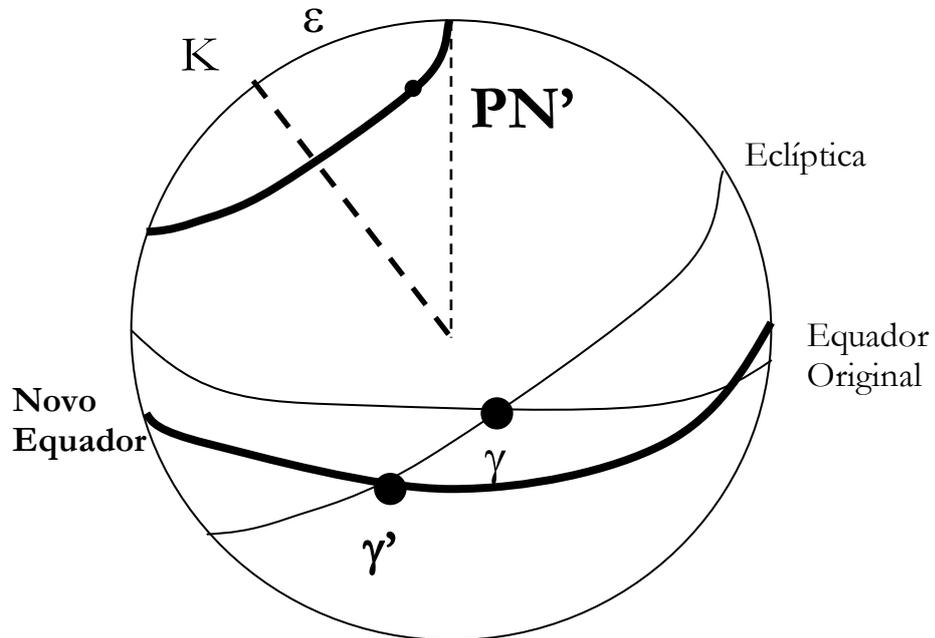


FIGURA 4.13. Precessão luni-solar: atraso do ponto vernal a uma taxa de $\sim 50''$ por ano.

O período de precessão é da ordem de 26000 anos.

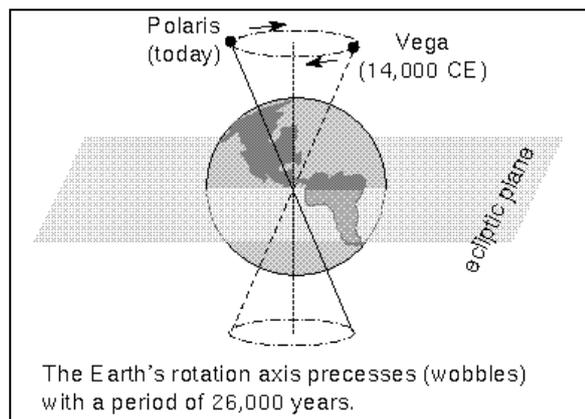


FIGURA 4.14 A estrela Polar deixará de ser a estrela ... "Polar".

Outra das consequências astronómicas da precessão concerne o facto do eixo de rotação da Terra não apontar sempre no mesmo sentido. Assim, se actualmente a estrela Polar é a estrela que (em termos angulares) está mais

próxima da projecção do eixo de rotação sobre a esfera celeste, dentro de 12000 será a estrela Vega na constelação da Lira (figura 4.14)¹⁶.

4.3.2 Efeito da precessão luni-solar sobre as coordenadas de uma estrela

Determinemos agora o efeito que a precessão luni-solar tem sobre as coordenadas uranográficas de uma astro. Seja a figura 4.15:

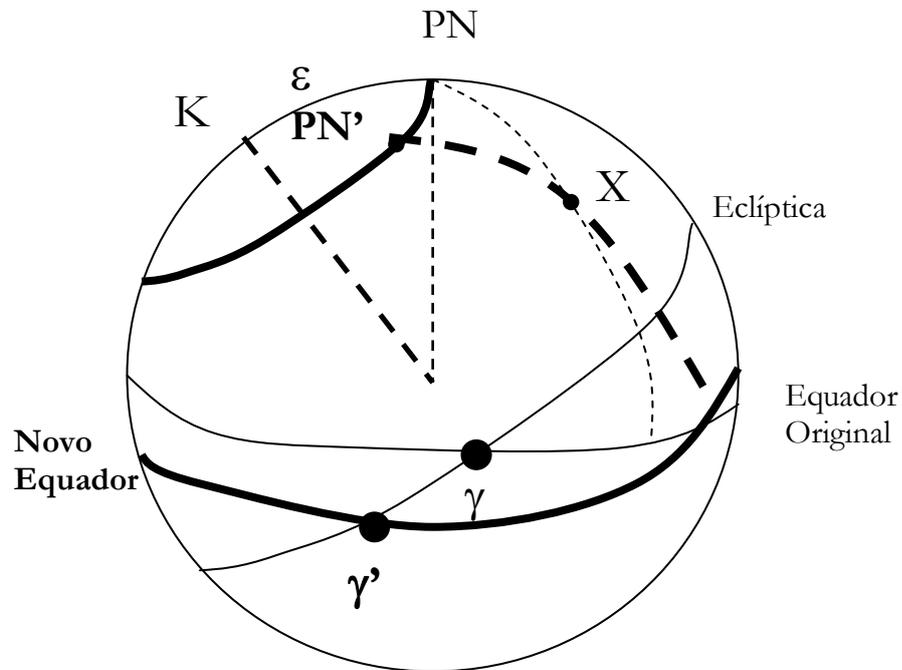


FIGURA 4.15 - Precessão luni-solar: aparente alteração da posição do astro: PN' é a nova posição do pólo norte.

Diferenciando a equação de transformação entre coordenadas eclípticas e a declinação, temos

$$\text{sen}\delta = \text{sen}\beta \cos\varepsilon + \cos\beta \text{sen}\varepsilon \text{sen}\lambda$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \text{sen}\delta &= \frac{d}{d\beta} \cos\varepsilon \text{sen}\beta + \frac{d}{d\beta} \text{sen}\varepsilon \cos\beta \text{sen}\lambda + \\ &+ \frac{d}{d\lambda} \text{sen}\varepsilon \cos\beta \text{sen}\lambda \end{aligned}$$

Ou seja

$$\cos\delta d\delta = \text{sen}\varepsilon \cos\beta \cos\lambda d\lambda$$

¹⁶ <http://www.astronomynotes.com/nakedeye/s6.htm>

Pela lei da analogia dos senos temos

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$

$$d\delta = \operatorname{sen} \varepsilon \cos \alpha d\lambda$$

Por outro lado diferenciando a seguinte equação,

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\cos \beta \cos \lambda) = \frac{d}{d\alpha}(\cos \alpha \cos \delta) + \frac{d}{d\delta}(\cos \alpha \cos \delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \delta = (\cos \beta \operatorname{sen} \lambda - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varepsilon \cos^2 \alpha) d\lambda$$

Usando agora a equação dos 5 elementos (deixando as adequadas simplificações como exercício) temos:

$$d\alpha = (tg \delta \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \alpha + \cos \varepsilon) d\lambda$$

onde $d\lambda = \psi \tau$, onde τ é a fracção do ano e

$$\psi = 50''.3878 + 0''.0049 \times T, T = \frac{(\text{ano} - 2000)}{100}$$

4.3.3 Precessão planetária

Os planetas do sistema solar têm um efeito não desprezável sobre o movimento de translação da Terra em torno do Sol e por isso sobre a eclíptica. Ao contrário da precessão luni-solar, este efeito – a precessão planetária – não produz movimento no equador, mas como a eclíptica é alterada, a obliquidade sofre variação.

No que concerne a alteração a alteração das coordenadas uranográficas, podemos fazer essa estimativa usando a figura 4.15:

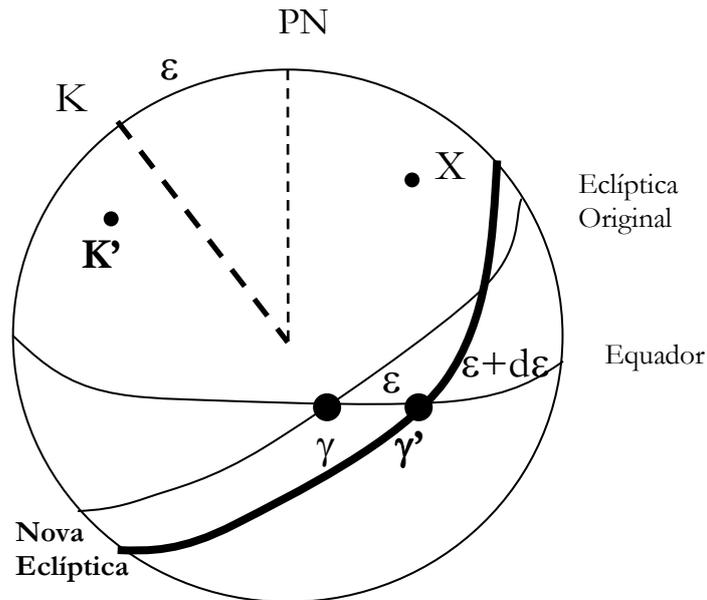
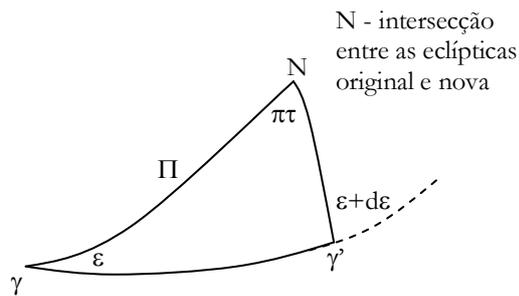


FIGURA 4.16 - Precessão planetária: alteração da posição do ponto vernal por mudança da eclíptica.

Resulta da figura que o efeito da precessão planetária em declinação seja nulo, $d\delta = 0$ e a variação em ascensão recta seja $d\alpha = -\gamma\gamma'$. A ascensão recta do astro decresce. Observações indicam que $\gamma\gamma' = \lambda'\tau$, com $\lambda' = 0''.1055 - 0''.0189T$.

Por outro lado a precessão planetária tem um efeito sobre a obliquidade da eclíptica, ao contrário do que se passa com a precessão lunisolar. Seja o triângulo esférico:



Π - longitude de N $\equiv 174^{\circ}.8764 + 0^{\circ}.9137T$
 π - taxa de rotação $\equiv 0''.4700 - 0''.0007T$

FIGURA 4.17 - Precessão planetária e o efeito sobre a obliquidade.

Pela lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}\Pi}{\text{sen}[180^\circ - (\varepsilon + d\varepsilon)]} = \frac{\text{sen}\gamma\gamma'}{\text{sen}\pi\tau}$$

simplificando e atendendo a que $(d\varepsilon, \gamma\gamma' = \lambda'\tau, \pi\tau) \ll 1$, vem,

$$\lambda' = \pi \text{sen}\Pi \left(\frac{1}{\text{sen}\varepsilon} \right)$$

Por outro lado, pela fórmula quatro elementos consecutivos:

$$\cos(\lambda'\tau)\cos\varepsilon = \cotg\Pi \times \text{sen}(\lambda'\tau) - \text{sen}\varepsilon \times \cotg[180^\circ - (\varepsilon + d\varepsilon)]$$

Uma vez mais simplificando e fazendo as aproximações habituais, vem

$$d\varepsilon = \cos\Pi \times (\pi\tau)$$

Esta expressão pode ser quantificada com auxílio das variáveis Π e π definidas no acetato anterior. Assim,

$$d\varepsilon = -0^\circ 0' 46'' \cdot 81 \times T.$$

Assim o valor de eclíptica para uma data qualquer determina-se por

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21'' \cdot 45 + d\varepsilon, \text{ sendo o primeiro termo}$$

do lado direito da equação o valor da obliquidade em 2000.

4.3.4 nutação

As perturbações induzidas pela órbita da Lua na da Terra não se reduzem ao efeito da precessão luni-solar. Um outro movimento do eixo de rotação da Terra, de período curto e periódico, pode ser detectado. Trata-se assim de um movimento oscilatório do eixo terrestre de amplitude máxima $9''$ e período ~ 18.7 anos - a nutação.

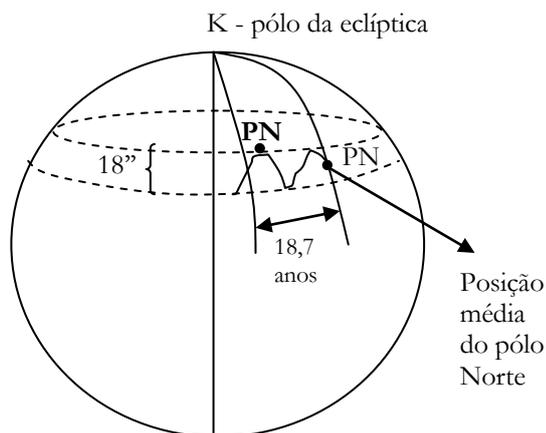


FIGURA 4.18 - a nutação e o movimento periódico de 18.7 anos.

nutação em longitude.

Uma das consequências do efeito de nutação é a variação da longitude dos astros, tal como acontece na precessão luni-solar.

Assim o efeito sobre as coordenadas uranográficas pode ser calculado fazendo apela às fórmulas deduzidas anteriormente para o caso da precessão luni-solar, fazendo a correspondente adaptação para a taxa de variação da longitude.

Assim

$$d\alpha = (tg\delta sen\epsilon sen\alpha + \cos\epsilon)\Delta\lambda$$

$$d\delta = sen\epsilon \cos\alpha \times \Delta\lambda$$

Onde,

$$\Delta\lambda \approx -17''.200 sen(125^\circ.045 - 1934^\circ.136 \times T)$$

Nota: A expressão de $\Delta\lambda$ aqui apresentada é uma aproximação. A expressão exacta pode ser consultada na página 229 do livro “Spherical Astronomy”.

nutação em obliquidade.

Decorre da figura 4.18 que a obliquidade é alterada pela nutação de uma quantidade $\Delta\epsilon$ variável com o tempo, cujo valor pode ser aproximado por (nota idem):

$$\Delta\epsilon \approx 9''.203 \cos(125^\circ.045 - 1934^\circ.136 \times T)$$

O efeito sobre as coordenadas uranográficas pode ser determinado da seguinte forma

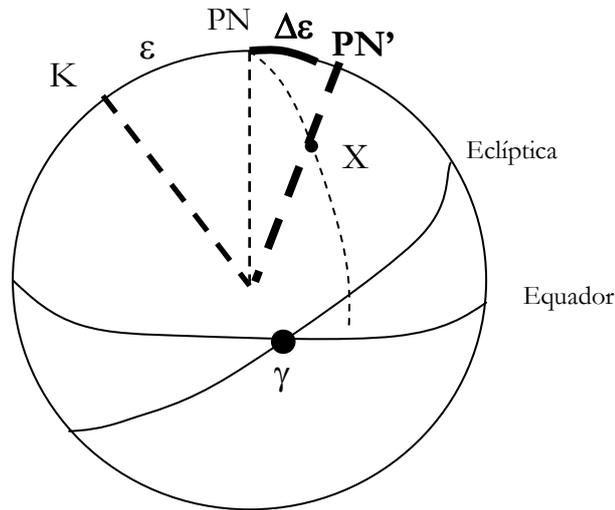


FIGURA 4.19 - Nutação e o efeito sobre as coordenadas uranográficas.

Seja a fórmula fundamental,

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \text{sen } \varepsilon \text{sen } \lambda$$

Diferenciando ambos os membros (para $d\lambda = 0$ - só há variação em obliquidade) vem,

$$\cos \delta d\delta = (-\text{sen } \beta \text{sen } \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \text{sen } \lambda) \Delta \varepsilon$$

Fazendo envolver a fórmula dos 5 elementos

e simplificando vem,

$$d\delta = \text{sen } \alpha \times \Delta \varepsilon$$

Por outro lado, diferenciando a fórmula dos

senos:

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

e simplificando vem:

$$d\alpha = -\text{tg } \delta \times \cos \alpha \times \Delta \varepsilon$$

4.4 Movimento próprio das estrelas

Em 1718 Edmund Halley descobre que as estrelas *Sirius*, *Aldebaran* e *Arcturus* mudaram efectivamente a sua posição quando comparadas as observações de então com posições catalogados por Hipparcos de Niceia. Trata-se assim do movimento próprio da estrela, intrínseco a esta e independente dos movimentos da Terra.

Seja uma estrela, a uma distância d do Sol, que num ano se desloca de A para B com um velocidade \mathbf{V} uniforme.

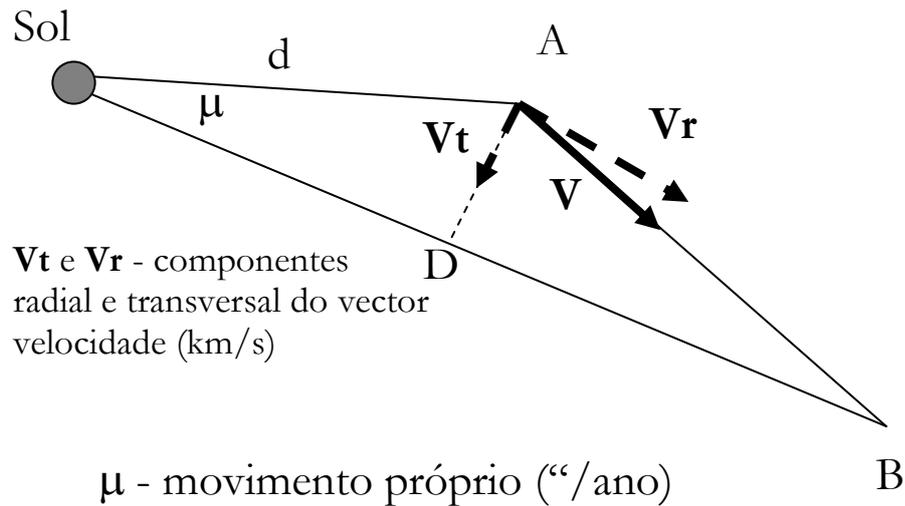


FIGURA 4.20 - Movimento próprio das estrelas.

A determinar de V_t em função de μ

$$AD = V_t \cdot n, \text{ com } n \equiv \text{número de segundos num ano} = 31557600$$

Por outro lado $AD = d \cdot \text{tg } \mu$

A estrela de maior movimento próprio é a Barnard com $10''.3/\text{ano}$. Assim $\mu \ll 1^\circ$. Portanto, em radianos, $AD \approx d \cdot \mu$. Uma vez que o μ é correntemente expresso em "/ano, então $AD \approx d \cdot \mu/206265$.

Daqui se tira que:

$$V_t = \frac{d \cdot \mu}{206265 \cdot n}$$

$$\pi(\text{paralaxe}) = \frac{a}{d} \cdot 206265, a \equiv \text{distância Terra - Sol}$$

$$V_t = \frac{a\mu}{n\pi} \approx 4.74 \times \frac{\mu}{\pi} (\text{km/s})$$

No que concerne o efeito do movimento próprio nas coordenadas uranográficas, seja a esfera celeste:

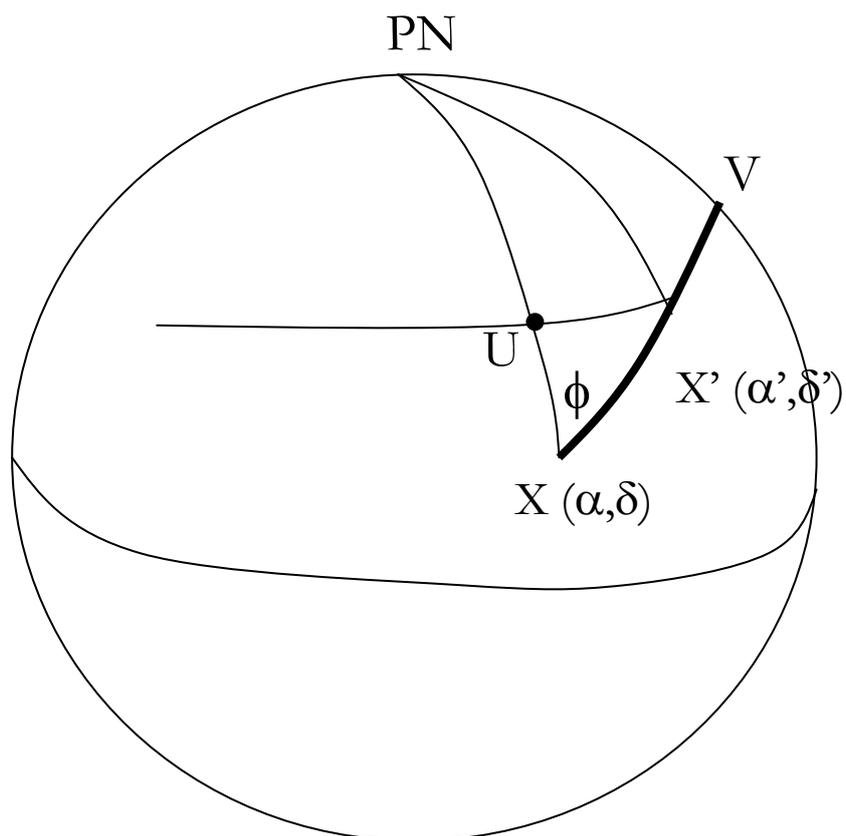


FIGURA 4.21 - Movimento próprio das estrelas e o efeito nas coordenadas uranográficas.

Onde,

V - direcção na esfera celeste para onde se dirige a estrela

ϕ - ângulo da direcção do movimento próprio

O arco $XX' = \mu dt$, onde dt (em anos) é o intervalo de tempo ocorrido entre as posições X e X'.

Por outro lado temos:

$$UX = XX' \cos \phi = d\delta$$

$$UX' = XX' \sin \phi = d\alpha \cos \delta$$

Daqui vem que:

$$\begin{cases} \mu_{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \mu \sin \phi \sec \delta \\ \mu_{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = \mu \cos \phi \end{cases}$$

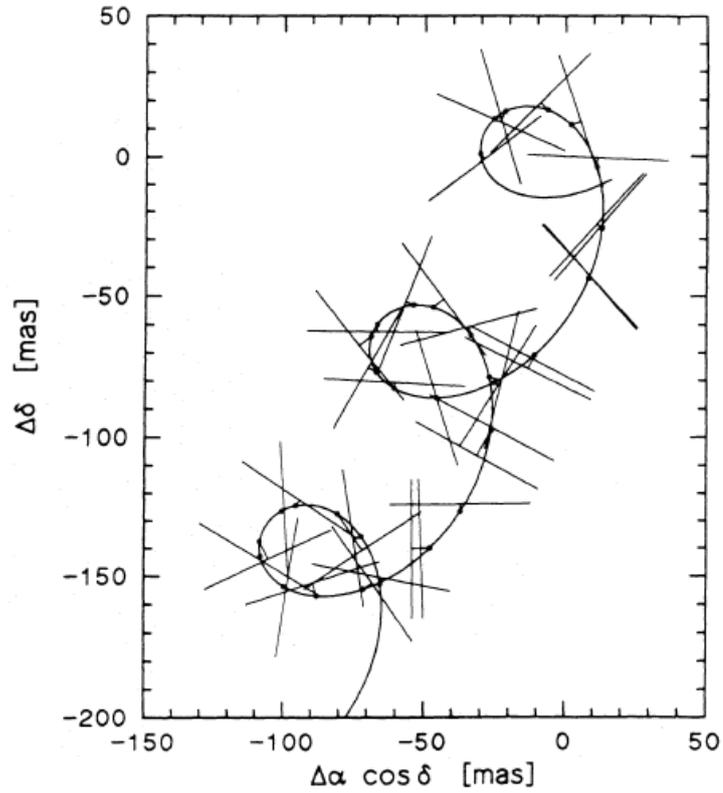


FIGURA 4.22 - Movimento de uma estrela ao longo dos 3,5 anos de observação do satélite Hipparcos. (Perryman et al 1995).

A figura 4.22 mostra o percurso, num sistema equatorial, de uma estrela ao longo de 3,5 anos quando observada pelo satélite HIPPARCOS: este movimento é resultado de uma combinação do efeito de paralaxe e do efeito de movimento próprio.

Capítulo 5. Os Sistemas de Tempo

Ah lève-toi, soleil! Fais pâler les étoiles...

(II acto de Romeu e Julieta, Charles Gounoud, 1867)

A identificação de um evento astronómico faz-se, antes de mais, pelo conhecimento de dois aspectos complementares: o posicionamento na Esfera celeste (assunto já debatido) e a datação. Entenda-se como datação a atribuição de um instante num dado sistema ou escala de Tempo.

Tomemos a definição de sistema de tempo como sendo “*um sistema constituído por um fenómeno físico observável, de natureza periódica, e uma função que relaciona com a recta real (a escala de tempo) cujos pontos são designados por instantes e cujos intervalos são os intervalos de tempo*” (Casaca et al. 2005).

A natureza fornece vários fenómenos que (em primeira aproximação) podem ser identificados como periódicos: a sucessão dos dias e das noites, as fases lunares e as estações do ano. A causa destes fenómenos (a rotação da Terra, a translação da Lua e a translação da Terra em torno do Sol) está ligada aos chamados sistemas de tempo astronómicos.

No âmbito desta disciplina incidiremos a nossa análise sobre os sistemas astronómicos rotacionais, ou seja os que estão identificados com o movimento de rotação da Terra.

5.1 Tempo Sideral (Aparente Local)

O Tempo Sideral (TS) define-se como o ângulo horário do ponto vernal. Decorre desta definição que, para um dado instante, qualquer astro respeita a relação $TS = H + \alpha$, α é a ascensão recta do astro.

Por vezes o Tempo Sideral é chamado também de Tempo Sideral Aparente Local.

Sendo TS uma grandeza eminentemente local (pois depende de H), podem relacionar-se os tempos siderais de dois locais distintos na Terra com a diferença de longitudes dos dois locais.

Seja a figura 5.1:

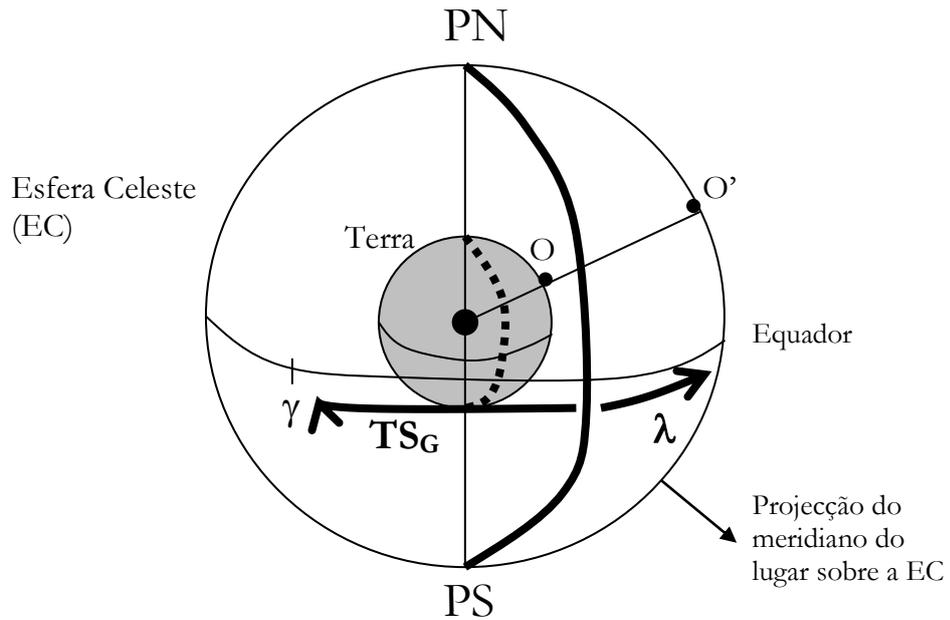


FIGURA 5.1 - Relação entre o Tempo Sideral Local e o Tempo Sideral em Greenwich.

Seja um observador à superfície terrestre (posicionado em O, cuja projecção sobre EC é O'). A linha a tracejado representa o Meridiano de Greenwich e a sua projecção sobre EC está representada a cheio e a “negrito”. Temos que:

- λ é a longitude do observador
- TSG é o Tempo Sideral de Greenwich

Assim $TSG + \lambda \equiv$ Tempo Sideral do observador O.

5.2 Tempo Sideral Médio

Devido à acção conjugada das forças gravíticas da Lua e do Sol sobre o equador terrestre (a precessão luni-solar e nutação) o ponto vernal sofre pequenas oscilações. Este facto tem como consequência a não regularidade na periodicidade do Tempo Sideral. Por este motivo há necessidade de introduzir o conceito de Tempo Sideral Médio (TSM), que pode ser interpretado como o ângulo horário de um “ponto vernal médio” (não sujeito às oscilações acima referidas). A relação entre estes dois tempos siderais é feita pela equação dos equinócios (EqEq):

$$TSM = TS - EqEq$$

5.2.1 Equação do Equinócios

A equação dos equinócios é dado por $EqEq = \psi \Delta \cdot \cos(\epsilon)$, onde ϵ é a obliquidade da eclíptica e

$$\Delta\psi \approx -17''.200 \sin(125^\circ.045 - 1934^\circ.136 \times T_U)$$

é a nutação da longitude celeste. Ver T_U em § 5.5.

A expressão de $\Delta\psi$ aqui apresentada é uma aproximação. A expressão exacta pode ser consultada na página 229 do livro “Spherical Astronomy” de R. Green. Em todo o caso para a precisão que usaremos a expressão acima é perfeitamente adaptada.

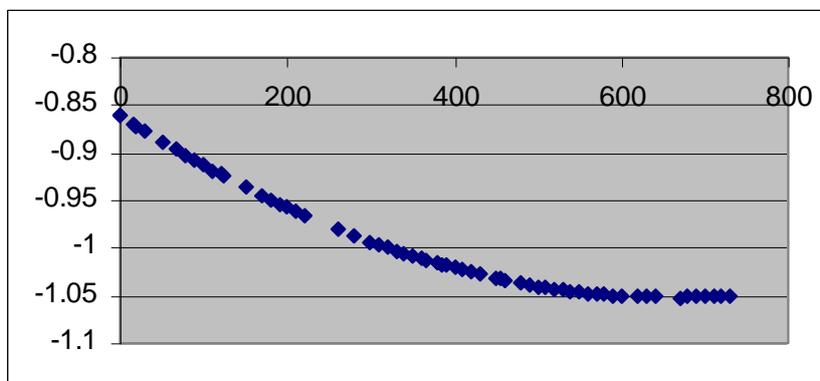


FIGURA 5.2 – Equação dos Equinócios entre 2000 e 2001.

5.3 Tempo Solar

Por analogia com a definição de Tempo Sideral, o Tempo Solar corresponde ao ângulo horário do centro Sol. Da mesma forma o Tempo Solar é também uma grandeza local. Por questões civis, o Tempo Solar é definido como

$$TSolar = H_{SOL} + 12 \text{ h}$$

Desta forma às 12h de TSolar corresponde a culminação superior do Sol no local. Pode perguntar-se se o TSolar é um sistema de tempo rigorosamente periódico Podemos re-escrever a equação a cima como:

$$TSolar = TS - \alpha_{SOL} + 12 \text{ h}$$

onde α_{SOL} é a ascensão recta do Sol. Assim a resposta à pergunta anterior depende da forma como α_{SOL} varia ao longo do ano.

Seja o movimento aparente do Sol na eclíptica,

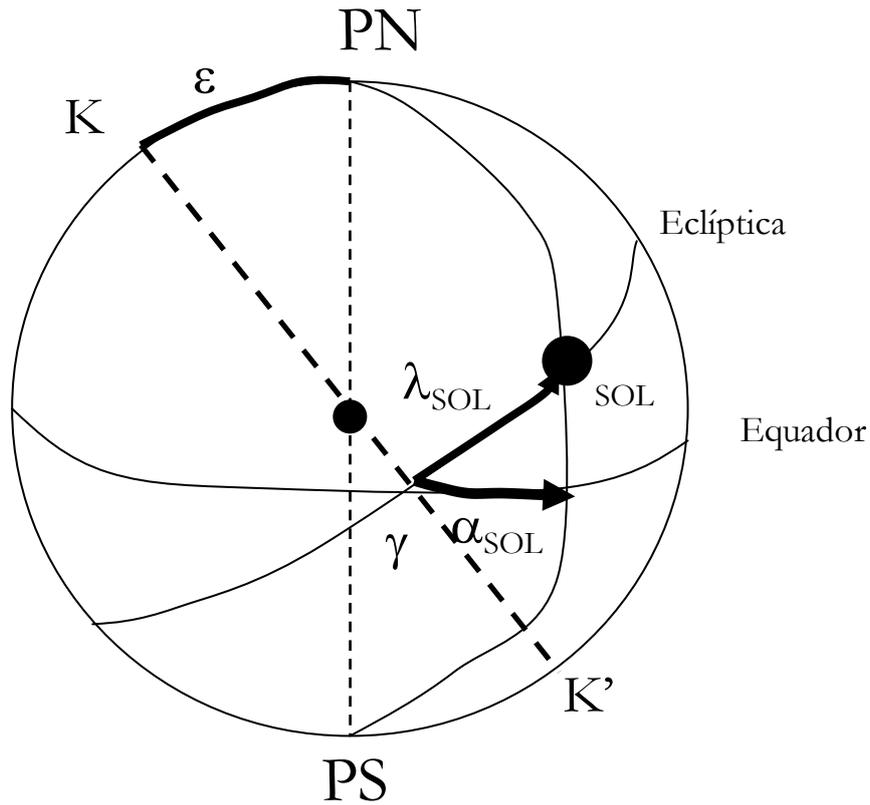


FIGURA 5.3 - Movimento do Sol, num sistema de coordenadas eclíptico.

Pela fórmula dos quatro elementos consecutivos, podemos obter

$$\alpha_{SOL} = \text{arctg}(\cos \varepsilon \times \text{tg } \lambda_{SOL})$$

onde λ_{SOL} é a longitude celeste do Sol.

Derivando ambos os membros em ordem ao tempo, temos que

$$\frac{d\alpha_{SOL}}{dt} = \left[\frac{\cos \varepsilon \times \frac{1}{\cos^2 \lambda_{SOL}}}{1 + (\cos \varepsilon \tan \lambda_{SOL})^2} \right] \times \frac{d\lambda_{SOL}}{dt}$$

Constata-se assim que a variação da ascensão recta com o tempo não vai ser constante por duas razões:

- Pelo facto da órbita da Terra em torno do Sol ser uma elipse, resulta que velocidade escalar da Terra não é sempre constante (eg 2ª lei de Kepler ou lei das áreas). Por consequência, a variação de λ_{SOL} com o tempo também não vai ser constante;
- O termo entre parêntesis recto (ou seja $d\alpha_{SOL}/d\lambda_{SOL}$) varia com λ_{SOL} . Nota-se que $d\alpha_{SOL} = d\lambda_{SOL}$ se ocorresse $\varepsilon = 0$. Na figura abaixo mostra-se esta variação.

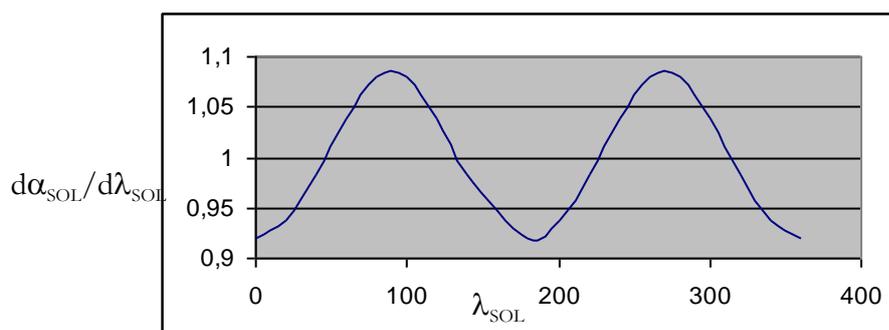


FIGURA 5.4 - Variação do termo $d\alpha_{SOL}/d\lambda_{SOL}$ ao longo de um ano.

Este comportamento é particularmente importante uma vez que mostra a variação de $d\alpha_{SOL}$ com o tempo.

Tal como foi dita atrás, resulta deste facto que o TSolar não é um Sistema de Tempo regularmente espaço ao longo do ano. O que coloca naturais problemas à sua utilização. Por este motivo é necessário a inclusão de um novo Sistema de Tempo, a saber ...

5.4 Tempo Solar Médio. Tempo Universal.

Imagine-se um Sol fictício em movimento (aparente) com as seguintes propriedades:

- Movendo-se numa órbita circular em torno da Terra (num sistema geocêntrico);
- Movendo-se no equador.

Por analogia com a definição de Tempo Solar, define-se como Tempo Solar Médio num dado local o ângulo horário do Sol fictício ou, também chamado, Sol médio.

Por questões civis, o Tempo Solar Médio é definido como

$$TSolarM = HSOL \text{ Médio} + 12 \text{ h}$$

O Tempo Solar Médio tem um variação constante garantida pelas propriedades em cima descritas e está para o Tempo Solar como o Tempo Sideral Médio está para o Tempo Sideral.

O Tempo Solar Médio em Greenwich designa-se por Tempo Universal.

5.4.1 Equação do Tempo

Assim, para um qualquer instante pode calcular-se a diferença entre os dois tempos solares conhecida como a equação do tempo, ET, a saber

$$TSolarM - TSolar = ET$$

Ao contrário da equação dos equinócios a equação do tempo pode atingir valores próximos dos 16 minutos. Em baixo, encontra-se a evolução de ET em função do tempo para o ano de 2004 .

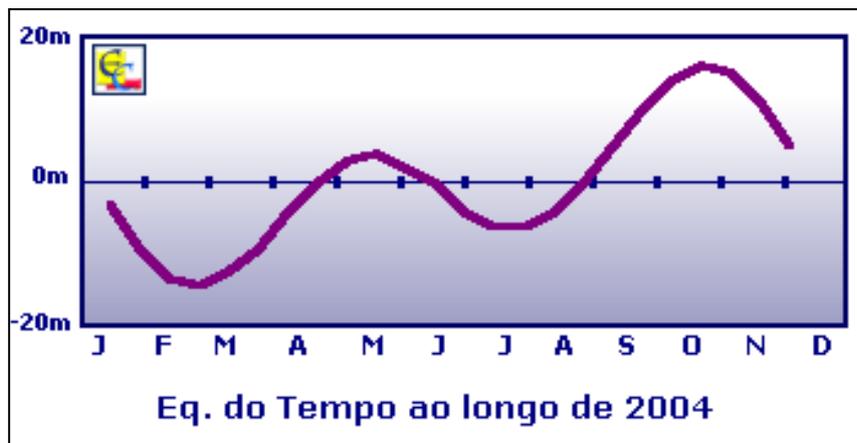


FIGURA 5.5 - Equação do Tempo para 2004 (Fonte: EFeCalc – Observatório Astronómico UC).

A forma da curva não é mais do que a figura da página anterior temperada pelo efeito da excentricidade da órbita da Terra ou seja, se analisarmos separadamente as duas causas que provocam a equação do tempo (obliquidade da elíptica - a verde - e excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol – a azul) resulta a figura a baixo. A vermelho está a equação do tempo que resulta da combinação entre as duas causas.

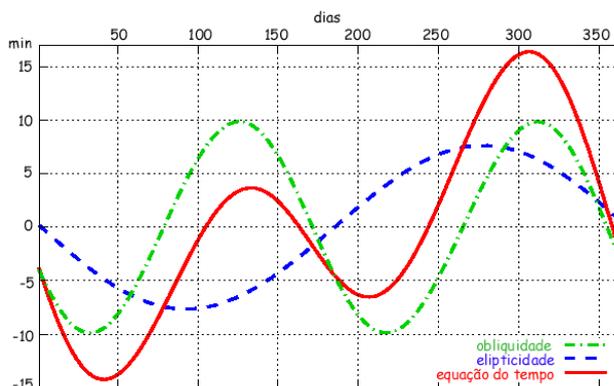


FIGURA 5.6 - Equação do Tempo e as suas causas¹⁷.

5.5 Relação entre os tempos médios: Sideral e Solar.

Se incluirmos as respectivas grandezas médias a equação $TS_{Solar} = TS - \alpha_{SOL} + 12 h$, esta pode ser re-escrita como

$$TS_{SolarM} = -ET + EqEq + TSM - \alpha_{SOL} + 12 h$$

¹⁷ http://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_do_tempo

Esta equação é bem conhecida para o Meridiano de Greenwich. Assim, Tempo Sideral Médio em *Greenwich* às 0h de Tempo Universal através da expressão:

$$TSMG_{0hTU} = 6^h 41^m 50^s .54841 + 8640184^s .812866T_U + \\ + 0^s .093104T_U^2 - 6^s .2 \times 10^{-6} T_U^3$$

em que TU é o intervalo medido em séculos Julianos que vai desde 2000 Janeiro 1, às 12h de tempo universal até à data considerada ou seja:

$$T_U = \frac{(DJ - 2451545)}{36525}$$

com DJ a data Juliana considerada (ver DJ à frente).

5.5.1 O Dia Solar Médio e o Dia Sideral Médio: a sua inter-relação.

A definição de Tempo Sideral está intimamente ligada ao conceito de Dia Sideral. Este define-se como o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do ponto vernal (ou de uma qualquer estrela) no meridiano do lugar. Por sua vez o Dia Solar define-se como o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol no meridiano do lugar. Estes dois intervalos de tempo não são exactamente iguais, porque enquanto que o Dia Sideral tem como referência um ponto na esfera celeste, que em boa aproximação se pode considerar fixo, o Dia Solar tem como referência o Sol que, graças ao movimento de translação da Terra, tem um movimento aparente de aproximadamente 1º/dia.

Recordemos que a Terra, no seu movimento de translação, desloca-se 360º em longitude celeste em 365.25 dias.

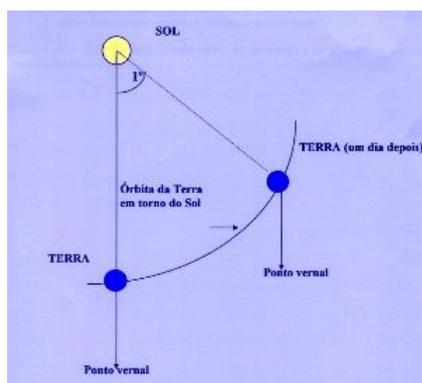


FIGURA 5.7 - Dia Solar e Dia Sideral.

aqui resulta que a duração do Dia Sideral seja menor que a do correspondente Dia Solar. De facto, às 24 h de tempo sideral médio correspondem 23h 56m 04s.091 de tempo solar médio. Os, aproximadamente, 4 minutos

de diferença correspondem à diferença diária de 1º de longitude celeste no movimento da Terra.

5.6 Data Juliana (DJ)

A Data Juliana corresponde ao número de dias solares médias decorridos desde 4713 a.C. até à data considerada. Trata-se de um forma cómoda de contagem dos dias, sem a preocupação de estar a discriminar os

meses com 28, 30 ou 31 dias bem como os anos bissextos. Este método terá sido elaborado em 1583 por Joseph Justus Scaliger (1540-1609), um historiador franco-italiano.

O início da contagem foi o dia 1 de Janeiro de 4713 a. C, que conjugava duas condições:

- O ciclo Solar de 28 anos (em que os dias do mês e da semana coincidem, no calendário Juliano), o ciclo Metónico de 19 anos (em que 19 anos solares é igual a 235 meses lunares) e o ciclo dos Impostos romanos de 15 anos (decretado pelo imperador Constantino) coincidiam em 4713 a. C.;
- Não havia, até então, registos datados por qualquer civilização de acontecimentos anteriores a 4713 a. C. o que, por si, evitava $DJ < 0$.

Há vários algoritmos para a determinação de DJ a partir de uma data Ano (A), Mês (M), Dia (D) e Hora (TU). Aqui se apresenta um desenvolvido na obra “*Ephemeris Calculations*”

$$DJ = \text{INT}(365.25 \times a) + \text{INT}[30.6001 \times (m+1)] + B + 1720996.5 + D + UT/24$$

Em que

$$a = A - 1 \text{ e } m = M + 12 \text{ se } M \leq 2 \text{ (ou seja Jan. e Feb.)}$$

$$a = A \text{ e } m = M \quad \text{se } M > 2$$

$$B = -2 \text{ se data } < 4/10/1582$$

$$B = \text{INT}(a/400) - \text{INT}(a/100) \text{ se data } > 15/10/1582$$

Em que INT devolve a parte inteira do número (não arredondado). Esta fórmula merece vários comentários que aqui se apresentam:

- A descontinuidade, no cálculo de B, em Outubro de 1582, deve-se a um acerto na transição entre os calendários Juliano e Gregoriano (hoje aceite) pelo facto de se ter detectado um erro na calendário Juliano. Assim, à quinta-feira 4 de Outubro do calendário Juliano sucedeu-se a sexta-feira dia 15 de Outubro do calendário Juliano;
- O valor 365.25 dias solares médios correspondem a 1 ano Juliano;
- O dia da semana pode ser calculado a partir da DJ, da seguinte forma: seja N o resto da divisão de $\text{INT}(DJ+0.5)$ por 7. Então $N=0$ corresponde a segunda-feira, $N=1$ a terça-feira, $N=2$ a quarta-feira, etc;
- O termo $\text{INT}(a/400) - \text{INT}(a/100)$, que aparece na fórmula de B, está intimamente ligada ao algoritmo da determinação de anos bissextos a saber, os anos divisíveis por 400 e por 4 , excluindo os divisíveis por 100.

5.7 Exemplo de determinação do Tempo Sideral

A determinação do tempo sideral é um dos aspectos mais importantes da Astronomia de posição, em particular no que concerne a determinação das posições observadas de um astro, num dado local de coordenadas geográficas conhecidas e para um dada data em TU.

Essa determinação pode ser dividida em vários passos.

Seja o seguinte exemplo concreto:

Determinar o Tempo Sideral no instante de uma ocorrência astronómica, num Observatório de longitude 34m 21s.600W, na manhã do dia 17 de Maio de 1982, para TU igual a 10h 00m 00s.000.

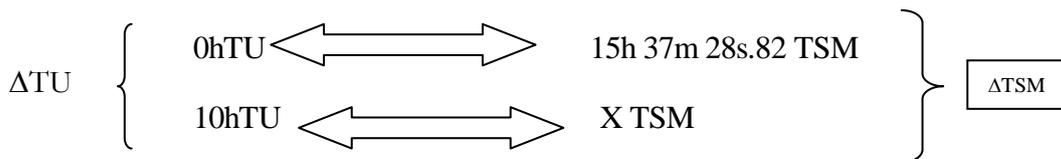
a) Determinação da DJ às 0h da data da Observação

$$DJ = 2445106.5$$

b) Determinação do TSMG às 0hTU

$$TSMG = 15h 37m 28s.82$$

c) Determinação do TSMG à hora da observação



Mas sabemos que 24 h de tempo sideral médio correspondem a 23h 56m 04s.091 de tempo solar médio, portanto por uma “regra de três simples”, temos que

$$\begin{array}{ccc} 23h 56m 04s.091 \text{ TSolarM} & & 24h \text{ TSM} \\ \Delta TU & \text{---} & \Delta TSM \end{array}$$

$$\text{Então } X = 15h 37m 28s.82 + \Delta TSM = 1h 39m 07s.38$$

d) Determinação do TSM no local de observação

$$TSM = TSMG + \lambda = 1h 4m 45s.78$$

e) Determinação de TS no local de observação

$$TS = TSM + EqEq = 1h 4m 44s.69, \text{ com } EqEq = - 1s.10$$

Capítulo 6. As estrelas como instrumentos de posicionamento

Sola, percluta, abbandonata...

(III acto de Manon Lescaut, Giacomo Puccini, 1893)

Este capítulo visa a apresentação de métodos para a determinação de grandezas de interesse em Engenharia Geográfica, a saber:

- Azimute
- Tempo Universal da Observação
- Longitude
- Latitude

Todos os métodos estão baseados na observação da altura de estrelas. Assumiremos ainda o conhecimento das outras grandezas quando está envolvido a determinação de uma delas. Por exemplo: na determinação do Azimute assumimos conhecidas as coordenadas geográficas do local.

Porém, antes de iniciar a apresentação dos métodos propriamente ditos, vamos apresentar um conjunto de efeitos que poderão influenciar a posição observada dos astros. Deter-nos-emos em particular no caso da refração astronómica ou atmosférica.

6.1 Refracção astronómica ou atmosférica

A radiação que passa através da atmosfera está sujeita ao fenómeno de refração. As leis de Snell são então aplicáveis. Seja um raio num meio 1 que incide numa superfície que separa este do meio 2. Onde n – índice de refração, $n=c/v$ (c – velocidade da luz no vácuo; v – velocidade da luz no meio).

Leis de Snell são:

- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- Os raios incidente e emergente encontram-se ambos no plano perpendicular ao plano que limita os dois meios.

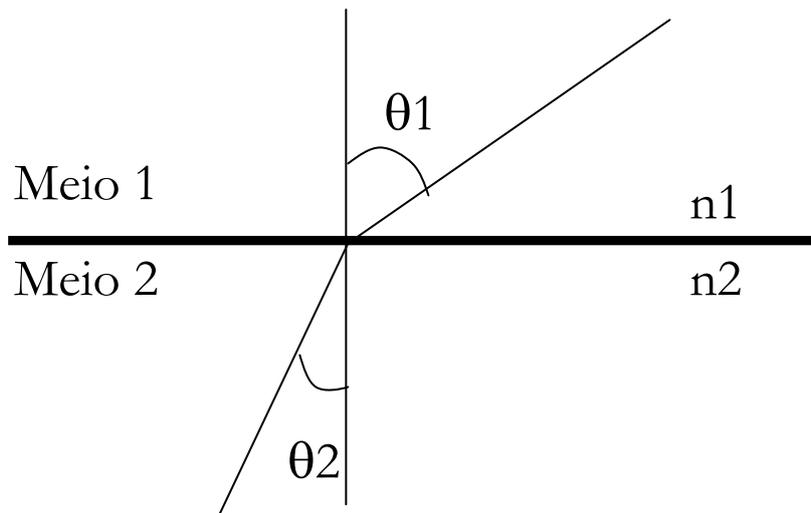


FIGURA 6.1 - Refracção e leis de Snell.

6.1.1 Atmosfera aproximada a camadas planas e paralelas

Consideremos agora a atmosfera como uma conjunto de camadas planas paralelas.

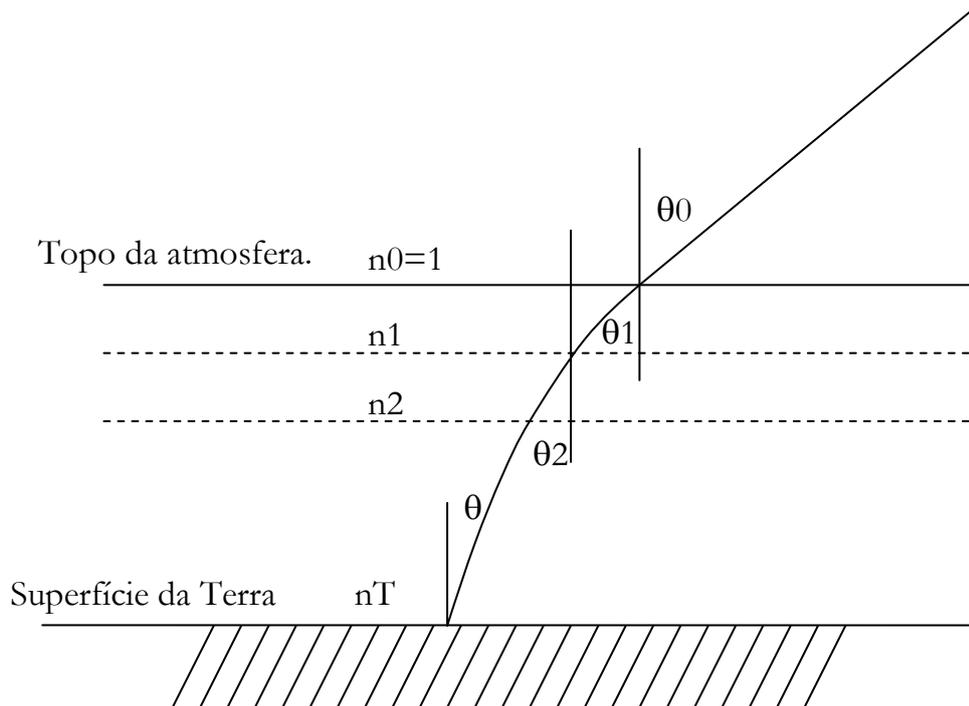


FIGURA 6.2 - Refracção atmosférica e leis de Snell.

A generalização da 1ª Lei de Snell vem:

$$n_0 \text{sen } \theta_0 = n_1 \text{sen } \theta_1 = n_2 \text{sen } \theta_2 = \dots = n_T \text{sen } \theta$$

Daqui resulta que :

- A Refracção diminui a distância zenital dos astros;
- O conhecimento do índice de refração à superfície da Terra e no topo da atmosfera (=1), bem como a distância zenital observada (θ), permite a determinação da distância zenital não afectada da refração (θ_0).

Define-se Refracção Astronómica como a diferença entre duas distâncias zenitais:

$$R = \theta_0 - \theta = z_0 - z$$

Cálculo de R:

$$R = z_0 - z \text{ e da Lei de Snell } \sin z_0 = nT \cdot \sin z$$

Portanto,

$$nT \cdot \sin z = \sin(R+z) = \sin R \cos z + \cos R \sin z$$

Considerando $R < 1^\circ$, vem:

$$nT \cdot \sin z = R \cdot \cos z + \sin z$$

$$R = (nT-1) \operatorname{tg} z$$

Para condições gerais de pressão e temperatura ($T=0^\circ$; $P=760$ mmHg) vem $nT=1.0002927$.

No caso geral (Lei de Gladstone-Dale):

$$R = 21''.3 \frac{P \left(1 + \frac{0.00567}{\lambda^2} \right)}{(273 + T)} \operatorname{tg} z$$

- P, pressão em mmHg
- T, temperatura em $^\circ\text{C}$
- λ , comprimento de onda da radiação em $\mu\text{m}=10^{-6}$ m

Esta fórmula encerra em si alguns resultados interessantes:

- Para os caso das condições normais de pressão e temperatura e $\lambda=0.5392$ μm vem: $R = 60''.45 \operatorname{tg} z$
- Dada a aproximação da atmosfera, como sendo estratificada em camadas planas, a validade desta fórmula está limitada a valores baixos de distância zenital, tipicamente $z_0 < 45^\circ$;
- Neste limite $R < 1'$;

- Qual será o efeito da Refracção do disco Solar e/ou Lunar ?

6.1.2 Atmosfera aproximada a camadas esféricas e concêntricas

Como foi já referido, o tratamento da refração recorrendo à aproximação das camadas planas e paralelas para a atmosfera, fica limitada a distâncias zenitais menores que 45°. Para valores superiores é necessário entrar em linha de conta com a esfericidade da atmosfera.

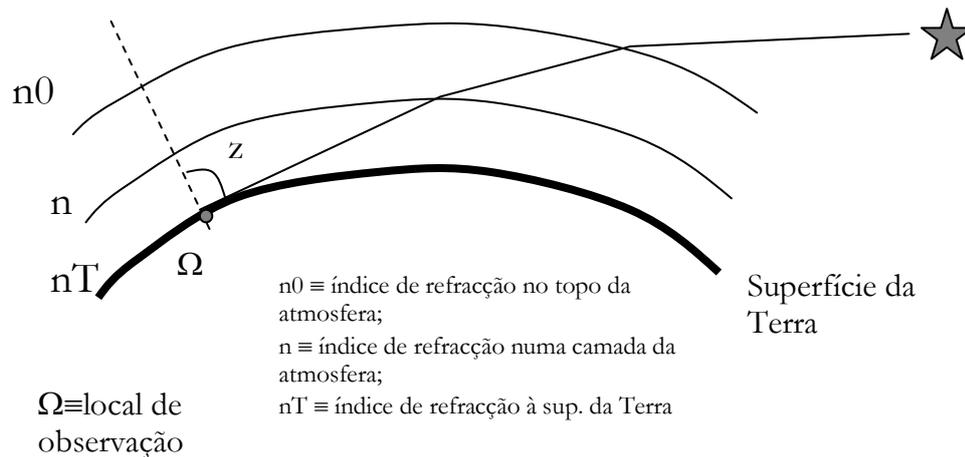


FIGURA 6.3 - Refracção atmosférica: camadas esféricas e concêntricas.

Neste caso pode demonstrar-se que o modelo mais adaptado é do tipo $R = A \operatorname{tg} z - B \operatorname{tg}^3 z$, com A e B constantes. Este modelo tem como limite de validade $z < 75^\circ$.

6.1.3 Tabelas para cálculo da refração

Para valores de distância zenital superiores a 75° não há um modelo analítico. Recorre-se para isso a tabelas calculadas com base em observações (ver Anexo). Na figura abaixo é apresentada a variação da refração (em segundo de arco) em função da distância zenital observada. A refração atinge o seu valor máximo (~34") no horizonte.

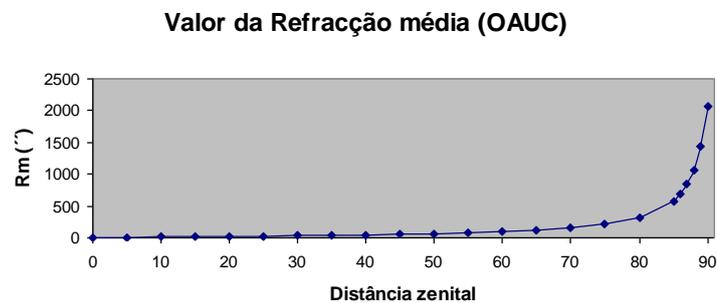


FIGURA 6.4 - Refracção atmosférica em função da distância zenital.

Na tabela abaixo compara-se os valores da refração (") dados pelos modelos de camadas planas paralelas (R_{par}), camadas esféricas e concêntricas (R_{esf}) e os valores de refração tabelados (R_m) para $T=15^\circ$ e $P=760$ mmHg ($K=57''\text{.}305$; $A=57''\text{.}085$; $B=0''\text{.}0666$)

$z(^{\circ})$	Rpar	Resf	Rm
0	0	0	0
5	5,013538	4,994246	5
10	10,10442	10,06526	10
15	15,35483	15,2946	16
20	20,85731	20,77403	21
25	26,72176	26,61242	26,5
30	33,08506	32,94522	33
35	40,12539	39,94848	40
40	48,0846	47,86066	48
45	57,305	57,0184	57
50	68,29344	67,91853	68
55	81,84002	81,33183	81
60	99,25517	98,52806	99
65	122,891	121,7623	122
70	157,4442	155,4585	155
75	213,8652	209,5822	209
80	324,9928	311,5968	312
85	654,9991	553,0313	578
86	819,4997	621,5741	690
87	1093,445	626,5601	843
88	1641	70,7507	1072
89	3283,001	-9252,64	1444
90			2075

6.1.4 Efeito da refração astronómica no nascimento e/ou ocaso do astro.
A refração astronómica tem como consequência diminuir a distância zenital do astro.

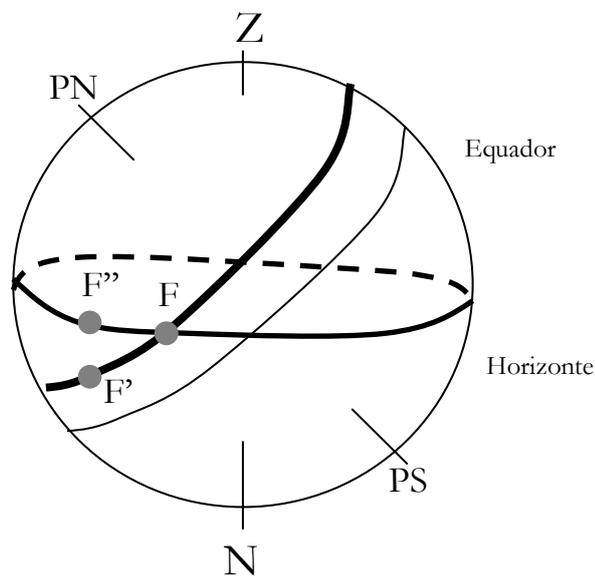


FIGURA 6.4 - Efeito da refração na duração do dia.

Assim, um observador não vai ver o ocaso de uma estrela em F (o verdadeiro ocaso astronómico) mas em F'', quando o astro já se encontra em F'.

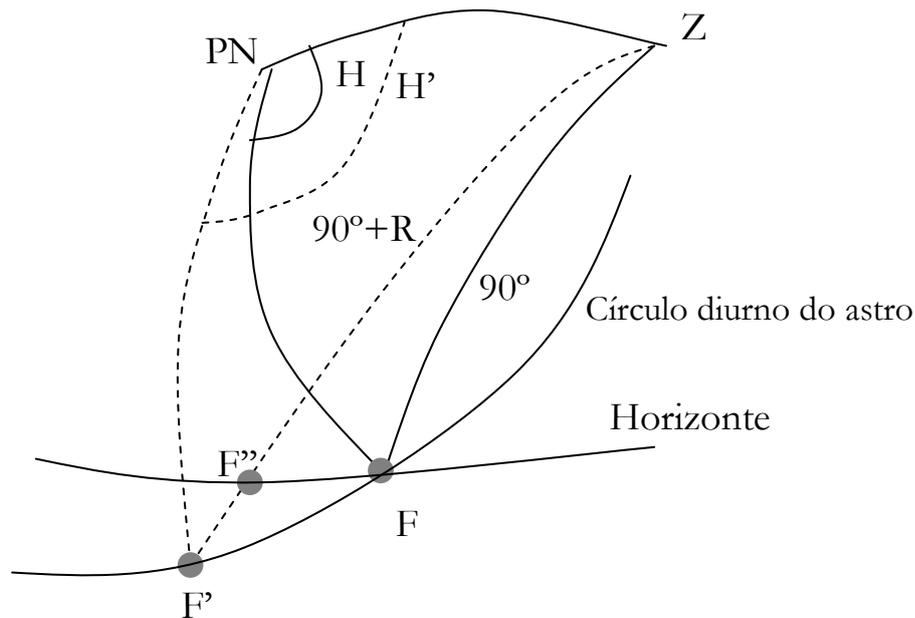


FIGURA 6.5 - Efeito da refração na duração do dia.

O comprimento do arco de círculo máximo $F'F''$ é exactamente igual ao valor da refração no horizonte, $R = 35'$ ($R \equiv$ Refracção Horizontal).

Assim podemos desenhar dois triângulos esféricos com o lado PNZ comum ($PNF = PNF'' = 90^\circ - \delta$)

Pretende-se assim determinar $H' - H = \Delta H$.

Do triângulo $PNZF$ podemos obter o resultado já conhecido

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

Por outro lado para o triângulo $PNZF'$ vem

$$\cos (90^\circ + R) = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (H + \Delta H)$$

Ou seja

$$\operatorname{sen} R = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta (\cos H \cos \Delta H - \operatorname{sen} H \operatorname{sen} \Delta H)$$

Considerando que R e $\Delta H < 1^\circ$ podemos aproximar por

$$R = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta (\cos H - \operatorname{sen} H \cdot \Delta H)$$

Substituindo $\cos H$ determinado em cima, e simplificando, vem

$$\Delta H = R \cdot (\cos \varphi \operatorname{sen} H \cos \delta)^{-1}$$

Assim a refração tem como consequência adicional de aumentar o tempo de visibilidade dos astros: nascem mais cedo e põem-se mais tarde.

6.2 Paralaxe Geocêntrica

O efeito de paralaxe, na generalidade, resulta da diferença entre as direcções de observação de um mesmo objecto obtidas de dois locais diferentes.

Seja a figura,

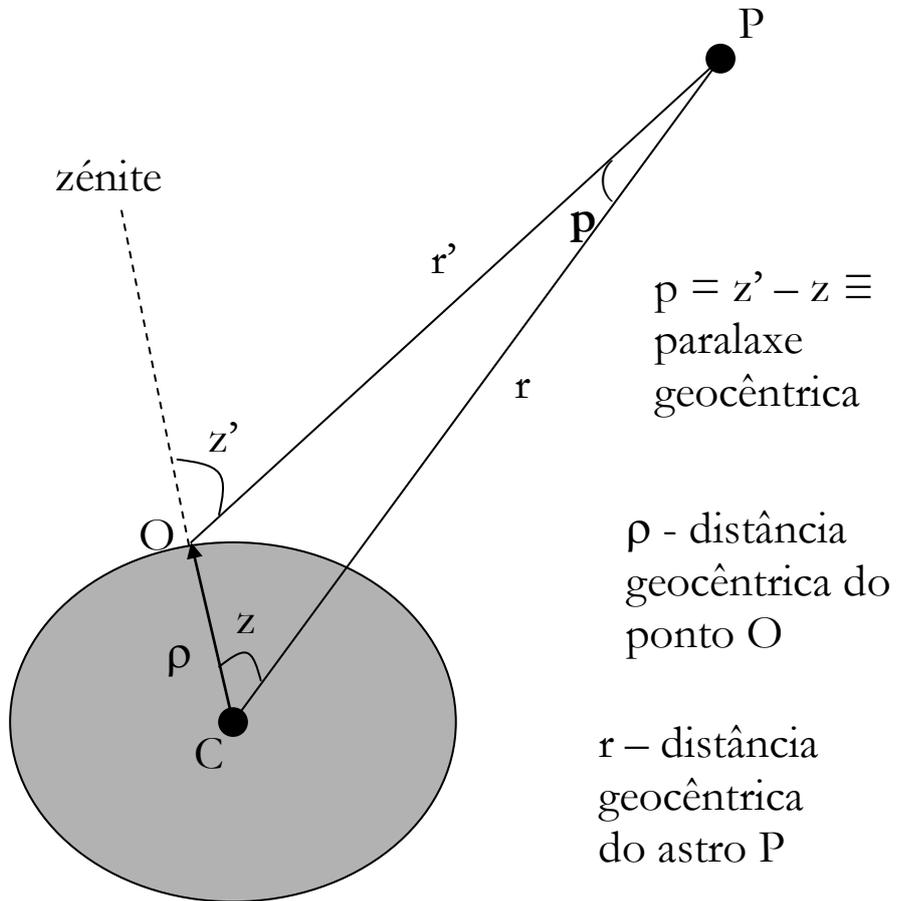


FIGURA 6.6 - Paralaxe geocêntrica.

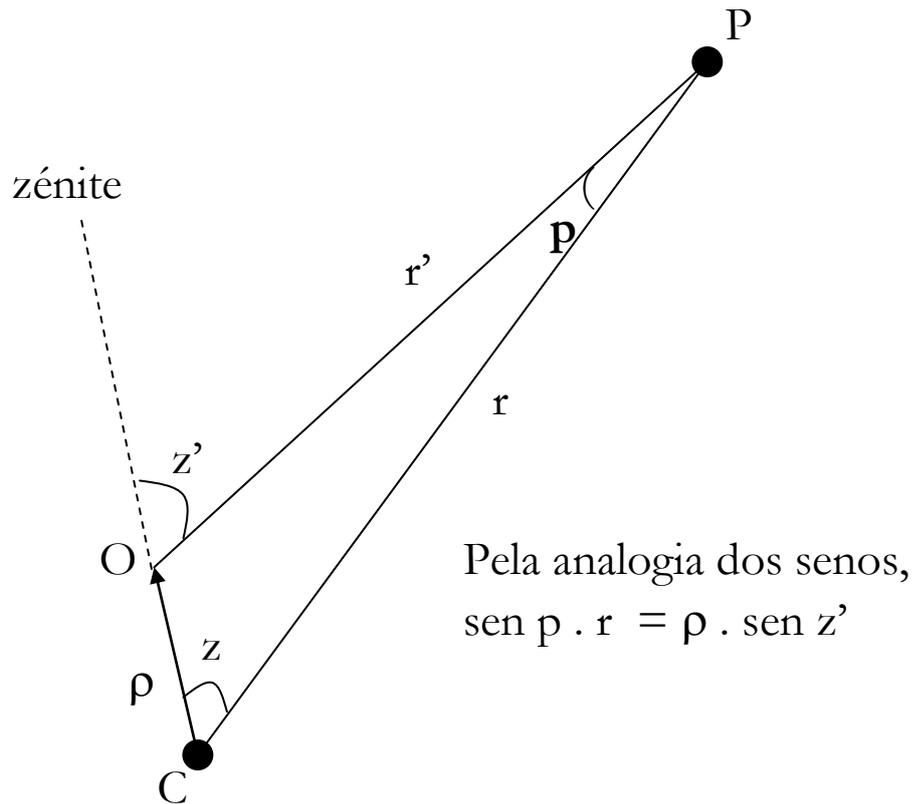


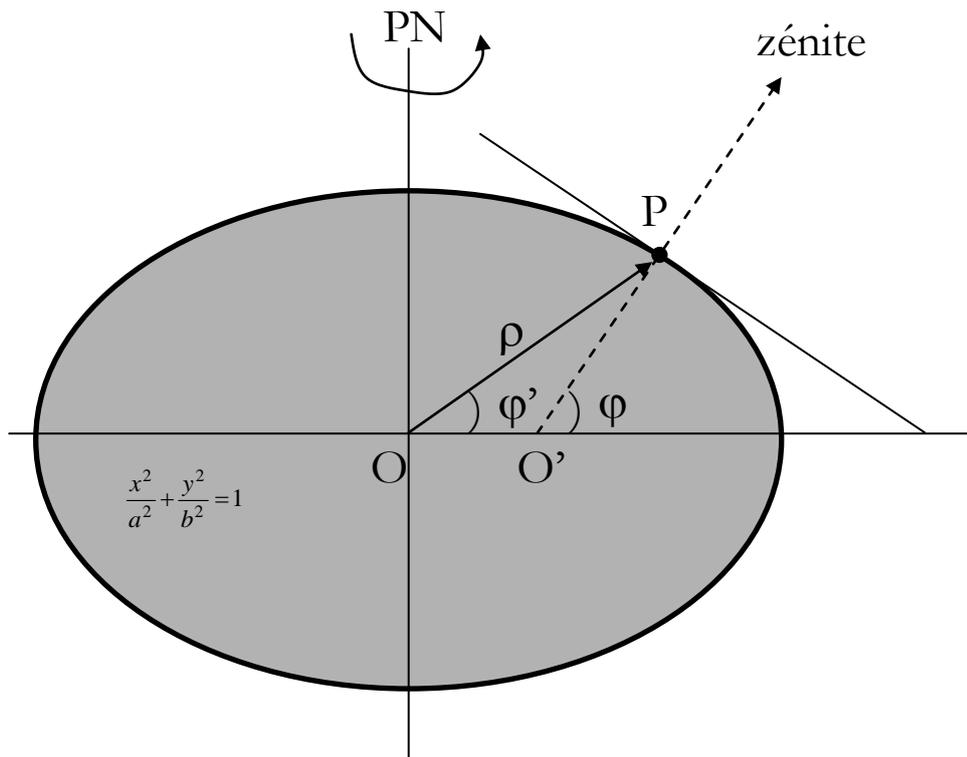
FIGURA 6.7 - Paralaxe geocêntrica e o seu cálculo.

A paralaxe geocêntrica tem como consequência o aumento da distância zenital dos astros. No caso do observador se encontrar no equador e o astro no horizonte, temos a paralaxe geocêntrica máxima, ou seja a p.g. horizontal equatorial. Assim,

$$\text{sen } p = (\rho_{eq}/r), \text{ mas } p \ll 1^\circ \text{ (estrelas)}$$

E para a Lua ? E para os planetas ?

Um dos aspectos mais relevantes da paralaxe geocêntrica é a diferença entre latitude geográfica e geocêntrica. É comum aproximar a Terra por uma esfera. Na a aproximação a um elipsoide de revolução seria mais adaptada. Seja então a elipse resultante da intersecção do elipsoide com um plano, perpendicular ao equador, que passa pelo seu centro O.



ρ - distância geocêntrica de P; φ = latitude geográfica de P; φ' = latitude geocêntrica de P

FIGURA 6.8 - Latitude geográfica e geocêntrica.

Seja a figura:

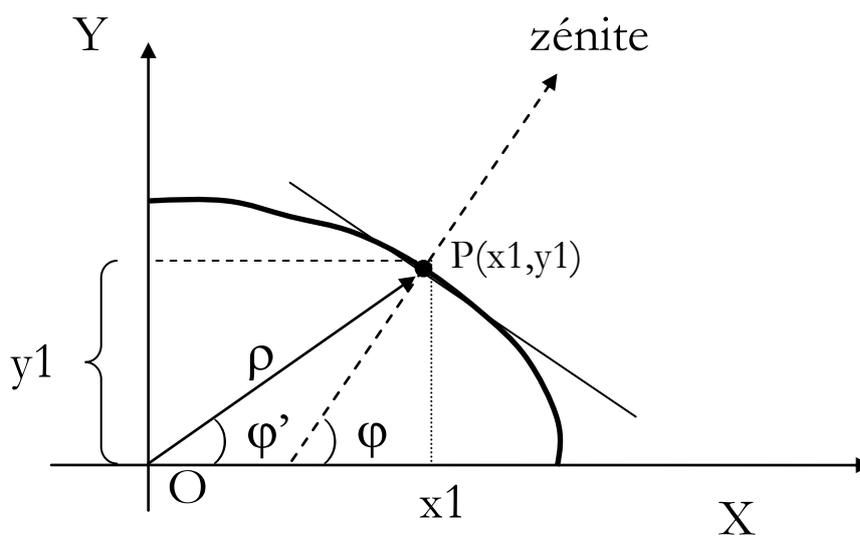


FIGURA 6.9 - Paralaxe geocêntrica o seu cálculo.

Podemos escrever que:

$$m_{OP} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow m_{\perp OP} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\cot g \varphi$$

Por outro lado sabemos que

$$-\cot g \varphi = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_P$$

Defina - se $f(x)$ da seguinte forma

$$f(x) = y = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, x \wedge y > 0$$

Assim,

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_P = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_1}{y_1}$$

$$-\cot g \varphi = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_1}{y_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cot g \varphi'$$

Assim vem

$$\cot g \varphi = \frac{b^2}{a^2} \cot g \varphi'$$

Na Assembleia Geral da União Astronómica Internacional de 1976 foi estabelecido que $a=6378.140$ km e $b=6356.755$ km. Daqui resulta um coeficiente de achatamento $f = 1 - b/a = 1/298257 \approx 3.353 \times 10^{-6}$

6.3 Aberração diurna

Tal como foi já visto, o efeito de aberração, na generalidade, é causado pelo facto do observador se encontrar em movimento relativamente a uma fonte de luz que se assume estar em repouso. De igual forma ao que já discutida a aberração anual, o movimento de rotação da Terra provoca a aberração diurna. A figura abaixo continua válida e por isso ...

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{L_1 L_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{O_2 L_1}$$

em que t é o tempo que a luz demora a atravessar o tubo do telescópio e c a velocidade da luz.

Assim,

$$\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{v}{c} \operatorname{sen} \theta_1$$

Para o movimento de rotação da Terra (daí o nome de aberração diurna) vem,

$$(\theta_2 - \theta_1) \leq 0''.32 \text{ (Porquê?)}$$

Assim, em resumo os fenómenos de

- Refracção astronómica
- Paralaxe geocêntrica
- Aberração diurna

são responsáveis por alterar (aparentemente) a posição do astro.

Os dois últimos fenómenos são, em primeira aproximação, desprezáveis se o astro for uma estrela (que não o Sol). Isto é particularmente verdadeiro se considerarmos a precisão instrumental dos teodolitos comuns (e usados cadeira de Elementos de Astronomia) que é da ordem de $10''$ - $20''$.

No que concerne os objectos do Sistema Solar (e contando com a mesma precisão observacional) a paralaxe geocêntrica só não é desprezável para a Lua e (eventualmente) para Vénus.

6.4 Métodos de posicionamento por observação astronómica

6.4.1 Determinação do Azimute

O método que aqui se propõe baseia-se na determinação do Azimute, por observação da altura de uma astro de declinação conhecida. Assume-se ainda o conhecimento da latitude.

Abaixo apresentam-se os passos para esta determinação:

1. Observação da altura do astro escolhido de coordenadas uranográficas conhecidas
2. Registo da pressão e temperatura com vista à determinação da refração
3. Determinar a altura verdadeira, h (corrigindo da refração e eventualmente da paralaxe geocêntrica, no caso de ser planeta)
4. Calcular o Azimute usando a relação (tendo em atenção a zona do céu da observação)

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varphi \text{ sen } h + \text{cos } \varphi \text{ cos } h \text{ cos } A$$

Para mais detalhes sobre este método pode consultar-se a aula apresentada nas Provas Públicas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, FCTUC (1998) pelo Engenheiro Manuel Facas Vicente. Este pode ser encontrado em www.mat.uc.pt/~vicente (em “Publicações”)

6.4.2 Determinação Tempo Universal de observação

O método que aqui se propõe baseia-se na determinação do Tempo Sideral (Aparente Local), por observação da altura de uma astro de ascensão recta e declinação conhecidas. Assume-se ainda o conhecimento da latitude e longitude do lugar bem como o dia do ano em causa.

Abaixo apresentam-se os passos para esta determinação:

1. Observação da altura do astro escolhido de coordenadas uranográficas conhecidas
2. Registo da pressão e temperatura com vista à determinação da refração
3. Determinar a altura verdadeira, h (corrigindo da refração e eventualmente da paralaxe geocêntrica, no caso de ser planeta)
4. Calcular o ângulo horário usando a relação

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta + \text{cos } \varphi \text{ cos } \delta \text{ cos } H$$

5. Calcular o Tempo Sideral sabendo que

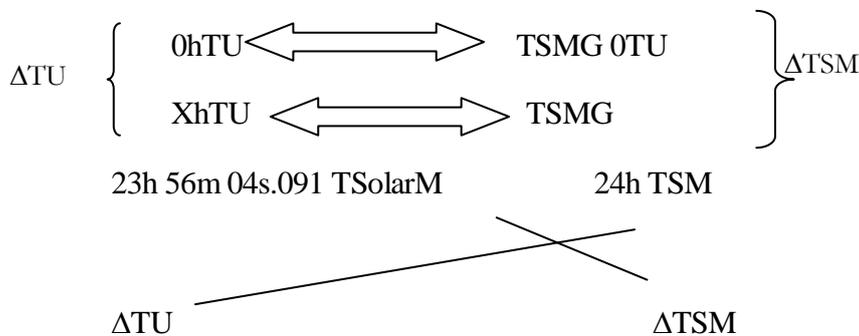
$$TS = H + \alpha$$

6. Calcular o Tempo Sideral Médio usando $TSM = TS - EqEq$ (calcular a equação dos equinócios pela forma descrita anteriormente)

7. Calcular o Tempo Sideral Médio em Greenwich usando $TSMG = TSM - \lambda$

8. Calcular o TSMG às 0hTU (passando pela determinação da Data Juliana às 0TU do dia considerado)

9. Determinação da hora da observação (XhTU)



Então $X = \Delta TU =$ hora de observação

6.4.3 Determinação da longitude

ste método baseia-se na observação da altura de uma qualquer estrela com o objectivo de determinar o seu ângulo horário.

Uma vez mais, pelo triângulo esférico:

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta + \text{cos } \varphi \text{ cos } \delta \text{ cos } H$$

- h , é observado com o teodolito e devidamente corrigido da refração. No caso do erro do aparelho ser inferior a 1", haverá também que entrar em linha de conta com o efeito de aberração diurna;

- δ , é a declinação da estrela e por isso pode ser consultada numa tabela/software de Efemérides Astronómicas
- φ , é a latitude assumida conhecida

Assim, determinando H e conhecendo a ascensão recta da estrela determina-se o Tempo Sideral Local ($TSL = H + \alpha$). Tendo registado o Tempo Universal à hora da observação é possível calcular o Tempo Sideral em Greenwich à hora da observação (TSG). Então

$$\lambda = TSL - TSG$$

6.4.4 Determinação da latitude

Este método baseia-se na observação de uma estrela que se encontra muito perto do pólo norte Geográfico (por exemplo a Estrela Polar).

Por resolução do triângulo esférico podemos obter:

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \cos p + \cos \varphi \text{sen } p \cos H$$

Onde $p = 90^\circ - \delta$, – distância polar

Como a estrela em causa está muito próxima do pólo norte Geográfico (para a Estrela Polar $p \sim 30'$), então escreva-se $h = \varphi + x$ (em que $x < 1^\circ$).

Assim vem,

$$\text{sen } \varphi \cos x + \cos \varphi \text{sen } x = \text{sen } \varphi \cos p + \cos \varphi \text{sen } p \cos H$$

Fazendo a respectiva aproximação da função seno e cosseno à Série de Taylor correspondente, vem:

$$\text{sen } \varphi (1 - 1/2x^2 + \dots) + \cos \varphi (x - 1/6x^3 + \dots) = \text{sen } \varphi (1 - 1/2p^2 + \dots) + \cos \varphi (p - 1/6p^3 + \dots) \cos H$$

Se guardarmos apenas os termos de primeira ordem, vem

$$x = p \cos H$$

e portanto

$$\varphi = h - p \cos H$$

Assim temos uma primeira aproximação para a latitude do lugar:

- h , é observado com o teodolito e devidamente corrigido da refração. No caso do erro do aparelho ser inferior a $1''$, haverá também que entrar em linha de conta com o efeito de aberração diurna;

- p , é o complementar da declinação da estrela e por isso pode ser consultada num software de Efemérides astronómicas
- $H = \text{TSL} - \alpha$, o Tempo Sideral Local é obtido por medida do Tempo Universal da Observação e a ascensão recta pode ser consultada numa tabela/software de Efemérides astronómicas.

Se guardarmos apenas os termos até à segunda ordem, vem

$$\cos \varphi(x) = -\text{sen } \varphi(1/2p^2) + \cos \varphi(x) \cos H + \text{sen } \varphi(1/2x^2)$$

Se substituírmos $x = p \cos H$ (determinado em cima), vem

$$x = p \cos H - \text{tg } \varphi(1/2p^2) \text{sen}^2 H$$

Por último vem ($\varphi \approx h$),

$$\varphi = h - p \cos H + \text{tg } h(1/2p^2) \text{sen}^2 H$$

O erro na determinação é essencialmente produzido pelo erro observacional em h , e por isso igual ao erro do aparelho.

Comentários finais

Neste texto fez-se uma apresentação das bases da astronomia esférica e de como esta permite o estudo de vários aspectos da astronomia de posição.

Os primeiros três capítulos dedicam-se à trigonometria esférica e suas aplicações ao movimento diurno e movimento aparente do astro na Esfera celeste. Os restantes capítulos têm uma preocupação maior de caminhar no sentido de dotar o aluno de meios para determinar a posição observada de um astro pelo conhecimento das suas coordenadas ucranográficas. O texto termina com uma aplicação ao posicionamento à superfície da Terra por observação astronómica.

Do ponto de vista da formação geral na área das Ciências do Espaço, seguirá agora a conclusão do trabalho já iniciado no âmbito da preparação de documento similar para a Mecânica Celeste.

VIIa. — Correção à refração média

Dist. zenital apar.	Termómetro											Dist. zenital apar.	Barómetro				
	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°	+35°		760 ^{mm}	750 ^{mm}	740 ^{mm}	730 ^{mm}	720 ^{mm}
0 0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0 0	"	"	"	"	
10 0	+ 1	+ 1	+ 1	0	0	0	0	0	- 1	- 1	- 1	10 0	0	0	0	0	
20 0	2	2	1	+ 1	0	0	0	- 1	1	2	2	20 0	0	0	0	- 1	
30 0	3	3	2	1	+ 1	0	0	- 1	1	2	3	30 0	0	0	- 1	1	
40 0	4	4	3	2	1	0	0	1	2	3	4	40 0	0	0	2	3	
45 0	5	5	3	2	1	0	0	1	2	3	4	45 0	0	0	1	2	
50 0	6	5	4	3	1	0	0	1	3	4	5	50 0	0	0	1	2	
55 0	8	6	4	3	2	0	0	2	3	4	6	55 0	0	0	1	2	
60 0	10	7	5	4	2	0	0	2	4	5	7	60 0	0	0	1	3	
65 0	12	10	7	5	2	0	0	2	4	6	8	65 0	0	0	2	3	
70 0	15	12	9	6	3	0	0	3	5	8	10	70 0	0	0	2	4	
71 0	16	12	9	6	3	0	0	3	5	8	10	71 0	0	0	2	4	
72 0	17	13	10	6	4	0	0	3	6	9	11	72 0	0	0	2	5	
73 0	18	14	11	7	4	0	0	4	6	9	12	73 0	0	0	3	5	
74 0	19	15	12	7	4	0	0	4	7	10	13	74 0	0	0	3	5	
75 0	20	16	13	8	4	0	0	4	7	11	14	75 0	0	0	3	6	
76 0	22	17	14	8	4	0	0	4	8	12	15	76 0	0	0	3	6	
77 0	24	19	15	9	4	0	0	4	8	13	16	77 0	0	0	4	6	
78 0	26	21	16	10	5	0	0	5	9	14	18	78 0	0	0	4	7	
79 0	29	23	17	11	5	0	0	5	10	15	20	79 0	0	0	4	8	
80 0	32	25	19	12	6	0	0	6	11	16	22	80 0	0	0	4	8	
30	34	26	20	12	6	0	0	6	11	17	23	80 0	0	0	4	9	
81 0	36	28	21	13	6	0	0	6	12	18	24	81 0	0	0	5	9	
30	38	30	22	14	7	0	0	7	13	19	25	81 0	0	0	5	10	
82 0	40	32	23	15	7	0	0	7	14	20	27	82 0	0	0	5	10	
30	43	34	24	16	8	0	0	8	15	21	29	82 0	0	0	6	11	
83 0	46	36	26	17	8	0	0	8	16	23	31	83 0	0	0	6	11	
30	49	39	28	18	9	0	0	9	17	25	33	83 0	0	0	6	12	
84 0	53	42	31	20	10	0	0	10	19	27	36	84 0	0	0	7	13	
30	58	46	34	22	11	0	0	11	21	30	39	84 0	0	0	7	14	
85 0	64	50	37	24	12	0	0	12	23	33	42	85 0	0	0	7	15	
10	66	51	38	24	12	0	0	12	23	34	43	85 0	0	0	7	15	
20	68	53	39	25	13	0	0	13	24	35	45	85 0	0	0	8	16	
30	70	55	40	26	13	0	0	13	24	36	47	85 0	0	0	8	16	
40	73	57	41	27	13	0	0	13	25	37	49	85 0	0	0	8	17	
50	76	59	43	28	14	0	0	14	26	38	51	85 0	0	0	9	17	
86 0	79	61	45	29	14	0	0	14	27	40	53	86 0	0	0	9	18	
10	82	64	47	30	15	0	0	14	28	41	55	86 0	0	0	10	19	
20	85	67	49	31	15	0	0	15	29	43	57	86 0	0	0	10	20	
30	89	70	51	32	16	0	0	15	30	45	59	86 0	0	0	10	21	
40	93	73	53	34	17	0	0	16	31	47	62	86 0	0	0	11	22	
50	97	76	55	36	18	0	0	17	33	50	65	86 0	0	0	11	23	
87 0	101	79	58	38	19	0	0	18	35	52	68	87 0	0	0	11	24	
5	103	81	59	39	19	0	0	18	36	53	69	87 0	0	0	12	25	
10	106	83	60	40	20	0	0	19	37	54	70	87 0	0	0	12	25	
15	109	85	62	41	20	0	0	19	38	55	72	87 0	0	0	12	26	
20	112	87	64	42	21	0	0	20	39	56	74	87 0	0	0	12	26	
25	115	89	66	43	21	0	0	20	40	57	76	87 0	0	0	13	27	
30	118	92	68	44	22	0	0	21	41	59	78	87 0	0	0	13	27	
35	121	95	70	45	22	0	0	21	42	61	80	87 0	0	0	14	28	
40	124	98	72	46	23	0	0	22	43	63	83	87 0	0	0	14	28	
45	128	101	74	47	23	0	0	22	44	65	85	87 0	0	0	14	29	
50	132	104	76	48	24	0	0	23	45	67	87	87 0	0	0	14	29	
55	136	107	78	50	25	0	0	23	46	69	90	87 0	0	0	15	30	
88 0	+ 140	+ 110	+ 80	+ 52	+ 26	0	0	- 24	- 48	- 71	- 93	- 114	88 0	0	0	+ 15	+ 30

A2 – Exercícios¹⁸

1. Converter:
 - a) $45^{\circ} 17' 18''$ em radianos e em horas, minutos e segundos
 - b) π radianos em graus, minutos de arcos e segundos de arco e em horas, minutos e segundos
 - c) 21h 16m 14s.5 em graus, minutos de arcos e segundos de arco e em radianos
2. Converter 2 radianos em graus, minutos e segundos.
3. Converter o ângulo $35^{\circ} 22' 05''$ em radianos.
4. Converta em horas, minutos e segundos o ângulo $\alpha = 312^{\circ} 24' 33''$.
5. Calcular o comprimento do arco correspondente ao ângulo ao centro de $25^{\circ} 55' 20''$ num círculo de 503^{m} .20 de raio.
6. Calcular o valor do raio do paralelo onde se encontra o Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (latitude geográfica $\varphi = 40^{\circ} 11' 52''.57$).
7. Calcule distância em km correspondente a um arco sobre o equador e ângulo ao centro de $1'$ (definição de “milha marítima ou náutica”).
8. Determine as coordenadas cartesianas do vector OP cujas coordenadas esféricas são $(r, \theta, \varphi) = (1, 45^{\circ}, 30^{\circ})$
9. Determine o produto interno e externo dos seguintes vectores $u = 2i + 3j - k$ e $v = i + 5j + 2k$
10. Demonstre a fórmula dos 4 elementos consecutivos: ex. $\cos a \cos C = \sin a \cotg b - \sin C \cotg B$

¹⁸ Muitos destes exercícios foram recuperados de textos anteriores elaborados pela Dra. Adriana Gracia e pelo Doutor Manuel Facas Vicente.

11. Resolver o triângulo esférico $[ABC]$, dado por:

a) $A = 90^\circ$ $b = 65^\circ 37' 45''$ $c = 41^\circ 08' 17''$

b) $a = 98^\circ 27' 37''$ $b = 27^\circ 13' 41''$ $c = 75^\circ 36' 58''$

c) $b = 16^\circ 42' 30''$ $c = 47^\circ 14' 04''$ $A = 153^\circ 02' 14''$

d) $a = 33^\circ 42' 22''$ $B = 53^\circ 46' 08''$ $C = 108^\circ 46' 58''$

12. Prove que, num triângulo esférico equilátero, os lados e os ângulos satisfazem a seguinte relação: $\sec A - \sec a = 1$ (Spherical Astronomy, pag. 21)

13. Um triângulo esférico é sujeito a uma pequena deformação. Demonstre que aos elementos do triângulo sofrem alterações diferenciais de acordo com as seguintes expressões:

a) $da = \cos C db + \cos B dc + K \sin b \sin c dA$

b) $dA = -\cos c dB - \cos b dC + K^{-1} \sin B \sin C da$

com $K = (\sin A/\sin a) = (\sin B/\sin b) = (\sin C/\sin c)$

c) Deduza as respectivas expressões para db , dB , dc e dC

(Spherical Astronomy, pag. 22)

14. A e B são dois locais à superfície da Terra com a mesma latitude φ ; a diferença das longitudes de A e B é $2L$. Prove que

a) A latitude máxima atingida pelo arcos de círculo máximo AB é $\text{arc tg}(\text{tg } \varphi \sec L)$

b) A distância entre A e B medida ao longo do paralelo de latitude φ excede a distância ao longo do círculo máximo em $2 \operatorname{cosec} 1' \times [L \times \cos \varphi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} (\operatorname{sen} L \cos \varphi)]$ milhas náuticas

(Spherical Astronomy, pag. 20)

15. Dois portos encontram-se no mesmo paralelo de latitude $42^{\circ} 27' N$. A sua diferença de longitudes é $137^{\circ} 35'$. Os navios A e B navegam à velocidade de 20 nós de um porto para o outro. O navio A navega ao longo do paralelo de latitude; o navio B navega ao longo do arco de círculo máximo que liga os dois portos. Calcule a diferença de tempo na sua chegada, considerando que os navios partem no mesmo instante e supondo a Terra esférica de raio 6378 km. Nota: um nó corresponde à velocidade de uma milha marítima por hora e uma milha marítima equivale a 1.855 km.

16. Pretende-se estabelecer a ligação entre os pontos *Cabo da Roca* e *Halifax*, partindo do primeiro ponto. São conhecidas as suas coordenadas geográficas: $\phi_C = 38^{\circ} 46' N$, $\lambda_C = 9^{\circ} 30' W$ e $\phi_H = 44^{\circ} 40' N$, $\lambda_H = 63^{\circ} 35' W$. Supondo que se pretende usar o caminho mais curto entre os dois pontos (ao longo da geodésica), determine o rumo de partida e a distância entre os dois locais.

17. Determine a distância entre as cidades de *Helsínquia* e *Seattle* ao longo do caminho mais curto à superfície terrestre. Qual o ponto mais a norte de trajecto? E qual é a distância deste ponto ao pólo norte? Para a longitude de *Helsínquia* use o valor $\lambda_1 = 25^{\circ} E$ e para a latitude use $\phi_1 = 60^{\circ} N$. Para *Seattle* considere para a latitude e para a longitude os valores $\phi_2 = 48^{\circ} N$ e $\lambda_2 = 122^{\circ} W$, respectivamente. Considere a Terra esférica com raio igual a 6378 km.

18. Dois observatórios de radioastronomia desejam estabelecer entre si uma ligação rádio. As longitudes e latitudes são, respectivamente, $2^{\circ} 18'.4 W$, $53^{\circ} 14'.2 N$ (*Jodrell Bank, Inglaterra*) e $79^{\circ} 50'.2 W$, $38^{\circ} 26'.3 N$ (*Green Bank, West Virginia, USA*). Em que direcção angular para norte

deve ser orientada a antena colocada na primeira estação, para se conseguir uma melhor transmissão (isto é, a direcção do arco de círculo máximo)?

19. Calcular o comprimento da rota aérea directa de *São Francisco* ($122^{\circ} 25' W$, $37^{\circ} 40' N$) para *Tóquio* ($139^{\circ} 45' E$, $35^{\circ} 48' N$). Determine a direcção segundo a qual o avião deve partir de *São Francisco* e calcule a latitude e a longitude do ponto situado mais a norte nesta rota. (Spherical Astronomy; 1.8)

20. Pretende efectuar-se a ligação aérea entre a capital do Senegal, *Dakar* ($17^{\circ}29' W$, $14^{\circ}34' N$) e a capital da Nova Zelândia, *Wellington* ($174^{\circ}47' E$, $41^{\circ}17' S$).

a) Calcule, em milhas náuticas, o comprimento mínimo da rota.

b) Determine a longitude do ponto de intersecção da rota com o equador terrestre.

c) Obtenha a latitude do ponto mais a norte do trajecto. Considerando a Terra esférica de raio $6378km$, determine ainda a distância deste ponto ao pólo norte terrestre.

(Exame 97/98)

21. Calcular o comprimento da rota aérea directa entre os pontos da esfera terrestre P1 ($27^{\circ} 40' N$, $122^{\circ} 25' W$) e P2 ($05^{\circ} 48' S$, $139^{\circ} 45' E$). A viagem faz-se no sentido de P1 para P2. Determine os rumos de partida e de chegada e calcule a latitude e a longitude do ponto situado mais a norte e do ponto situado mais a sul nesta rota. (Exame 98/99)

22. Determine a distância entre as cidades de Lima ($\varphi = 12^{\circ} 0' S$; $\lambda = 77^{\circ} 0' W$) e de Lisboa ($\varphi = 38^{\circ} 42' N$; $\lambda = 9^{\circ} 10' W$) e a longitude e latitude do ponto médio da geodésica que as liga. (Exame 00/01)

23. Considere a geodésica que liga as cidades do Rio de Janeiro ($\varphi = 23^{\circ} 0' S$; $\lambda = 43^{\circ} 25' W$) e de Lisboa ($\varphi = 38^{\circ} 42' N$; $\lambda = 9^{\circ} 10' W$). Seja P o ponto de intersecção da geodésica com o equador. Determine (em km):

- a) a distância entre o Rio de Janeiro e o ponto P;
- b) a distância entre Lisboa e o equador.

(Exame 00/01)

24. Indique o azimute A dos pontos *norte*, *sul*, *este* e *oeste* do horizonte celeste.

25. Quais são os valores da ascensão recta α e da declinação δ do ponto vernal?

26. Indique o ângulo horário H e a declinação δ do zénite e dos pontos *Este* e *oeste*, para um observador situado à latitude ϕ .

27. Indique a ascensão recta α e a declinação δ dos pontos *norte*, *sul*, *este* e *oeste*, para um observador situado no hemisfério norte, à latitude ϕ e no instante de tempo sideral θ .

28. Indique o azimute A e a distância zenital z do pólo norte celeste, para um observador situado à latitude ϕ .

29. Indique o ponto da esfera celeste com azimute A e altura h constantes, para um observador situado no hemisfério norte.

30. Para que valores da latitude ϕ podem ocorrer as seguintes circunstâncias:

- a) Os círculos diurnos das estrelas serem paralelos ao plano do horizonte.
- b) O pólo sul celeste estar situado 30° acima do plano do horizonte.
- c) Todas as estrelas terem nascimento e ocaso.
- d) Todas as estrelas com declinação δ superior a 50° serem sempre visíveis.
- e) O plano da eclíptica ser perpendicular ao plano do horizonte.

31. Prove que a expressão que permite calcular o ângulo L que o plano do horizonte faz com o plano da eclíptica, num local de latitude ϕ , em função do tempo sideral θ , é:

$$\cos L = \sin \phi \cos \varepsilon - \cos \phi \sin \theta \sin \varepsilon$$

Em que condições esse ângulo atinge o valor máximo? E o valor mínimo? (Green 85; 2.7)

32. Calcular para o Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, de latitude $\phi = 40^\circ 11' 52''.57$, usando para a obliquidade da eclíptica o valor $\varepsilon = 23^\circ 26' 44''.84$, às 5^{h} de tempo sideral, a amplitude do ângulo formado pelos planos da eclíptica e do horizonte. Determine ainda os valores mínimo e máximo desse ângulo.

33. Demonstre que, para um observador à latitude 45° , uma estrela na sua passagem superior meridiana (ou culminação superior) verifica a seguinte relação,

$$\text{sen } \delta + \cos \delta = \sqrt{2} \text{sen } h$$

Onde h e δ são, respectivamente, a altura e a declinação da estrela. Qual será o correspondente valor do Azimute da estrela? (1ª Frequência 99/00)

34. Deduza as expressões que permitem calcular o ângulo horário H e a altura h de uma estrela de declinação δ , na sua passagem no 1° vertical, a Oeste de um lugar de latitude ϕ .

35. Considere um observador no equador terrestre. Determine o tempo que uma dada estrela é visível para esse observador (ou seja o intervalo de tempo em que a estrela se encontra acima do horizonte). Demonstre que o azimute dessa estrela, no nascimento ou no ocaso, é $90^\circ - \delta$, onde δ é a declinação da estrela. (Exame 98/99)

36. Uma estrela atravessa o meridiano do lugar, a sul do zénite, na culminação superior, a uma altura de 85° e cruza novamente o meridiano

do lugar, agora a norte, na culminação inferior, a uma altura de 45° . Determine a declinação δ desta estrela e a latitude ϕ do observador.

37. Determine a latitude do local situado no hemisfério norte onde a duração do dia mais longo é dupla da duração do dia mais curto. Considere $\varepsilon = 23^\circ 27'$. (1ª Frequência 97/98)

38. Mostre que, se um astro se localiza no plano da eclíptica, as suas coordenadas equatoriais celestes satisfazem a relação:

$$\tan \varepsilon = \frac{\tan \delta}{\sin \alpha}$$

39. Supondo que a obliquidade da eclíptica é $\varepsilon = 23^\circ 26' 44''.84$, calcular as coordenadas eclípticas da estrela *Pollux* (β *Geminorum*), cujas coordenadas equatoriais são:

$$\alpha = 7^h 45^m 18^s.946; \delta = 28^\circ 01' 34''.26$$

40. Em *Lisboa* ($\phi = 38^\circ 42' 30''.5 N$; $\lambda = 9^\circ 11' 10''.2 W$), em 1985 Março 25, observou-se a estrela *Regulus* (α *Leonis*) a uma altura de $58^\circ 15' 50''$ e com o azimute de $-141^\circ 57' 43''$. Determinar a declinação da estrela e o seu ângulo horário no instante da observação.

Sabendo que a ascensão recta desta estrela é $\alpha = 10^h 7^m 36^s.0$, determine o tempo sideral local da observação?

41. Em *Lisboa* ($\phi = 38^\circ 42' 30''.5 N$; $\lambda = 9^\circ 11' 10''.2 W$), em 1985 Março 25, observou-se a estrela *Regulus* segundo um ângulo horário de $22^h 42^m 35^s$. Sabendo que as coordenadas da estrela eram $\alpha = 10^h 07^m 36^s.0$ e $\delta = 12^\circ 02' 19''$, determine o azimute e a distância zenital no momento de observação.

42. Determinar o ângulo horário, a distância zenital e o ângulo paralático da estrela *Aldebaran* quando passa no primeiro vertical de *Lisboa*, a este e a Oeste. Considere para *Lisboa* as coordenadas

geográficas: $\phi = 38^\circ 42' 30''.5 N$ e $\lambda = 9^\circ 11' 10''.2 W$ e para a estrela as coordenadas: $\alpha = 4^h 35^m 05^s.2$ e $\delta = 16^\circ 28' 51''$.

43. Determinar o azimute e o ângulo horário da estrela *Aldebaran* quando esta está sobre o horizonte de *Coimbra* (nascimento e ocaso). Considere para *Coimbra* as coordenadas geográficas: $\phi = 40^\circ 11' 52''.57 N$ e $\lambda = 8^\circ 26' 37''.11 W$ e para a estrela a ascensão recta $\alpha = 4^h 35^m 05^s.2$ e a declinação $\delta = 16^\circ 28' 51''$.

44. Determinar a distância zenital e o azimute da estrela *Pollux* (β *Geminorum*), quando o seu ângulo horário for de 6^h , num lugar de latitude $\phi = 40^\circ 24' 30''.0 N$ e longitude $\lambda = 3^\circ 11' 10''.2 W$. Considere para as coordenadas da estrela $\alpha = 7^h 44^m 25^s.8$ e $\delta = 28^\circ 03' 43''$.

45. Num lugar de latitude $\phi = 37^\circ 11' 13'' N$ deseja apontar-se um teodolito, que lê distâncias zenitais e azimutes, para a estrela β *Ceti* às 23^h de tempo sideral local. Conhecendo os valores da ascensão recta e da declinação da estrela: $\alpha = 0^h 41^m 58^s.8$ e $\delta = -18^\circ 09' 53''$, calcular as coordenadas necessárias para apontar o teodolito.

46. Determine um valor aproximado da diferença na duração do dia (entende-se por dia o período em que o centro do Sol está acima do plano do horizonte), à latitude do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra $\phi = 40^\circ 11' 52''.57 N$, nos solstícios de Verão e de Inverno. Use para a obliquidade da eclíptica o valor $\varepsilon = 23^\circ 27'$. (Exame 99/00)

47. Determine nos solstícios de Verão e de Inverno a duração aproximada do crepúsculo astronómico da manhã, à latitude do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra $\phi = 40^\circ 11' 52''.57 N$. Note que o crepúsculo da manhã inicia-se quando o centro do Sol se encontra 18° abaixo do plano do horizonte.

Use para a obliquidade da eclíptica o valor $\varepsilon = 23^\circ 27'$.

48. Calcular a distância angular d entre as estrelas α *Bootis* (*Arcturus*) e α *Virginis* (*Spica*), sabendo que, para um dado instante, se tem:

$$\text{Arcturus} \quad \alpha = 14^{\text{h}} 15^{\text{m}} 39^{\text{s}}.7$$

$$\delta = 19^{\circ} 10' 57''$$

$$\text{Spica} \quad \alpha = 13^{\text{h}} 25^{\text{m}} 11^{\text{s}}.6$$

$$\delta = -11^{\circ} 09' 41''$$

49. O azimute A de uma estrela, quando do seu nascimento num lugar com latitude $\phi = 30^{\circ}$, é -30° . Determine a declinação δ da estrela, o ângulo horário H do seu nascimento e a distância zenital z na sua passagem superior meridiana no mesmo lugar.

50. Prove que a expressão que lhe permite determinar a latitude ϕ de um lugar, sabendo que, num certo instante, há duas estrelas, de coordenadas equatoriais locais conhecidas, que se encontram num mesmo plano vertical, é:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{tg} \delta_2 \operatorname{cosec} H_2 - \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{cosec} H_1}{\operatorname{cotg} H_2 - \operatorname{cotg} H_1}$$

51. Num local de latitude 30° , a altura h de uma estrela, no instante da sua culminação superior a norte do zénite, é 45° . Calcule a altura h a que a estrela se encontrava três horas siderais antes daquela passagem superior.

52. Determine o tempo sideral θ e o azimute A correspondentes ao nascimento e ao ocaso da estrela α *Geminorum*:

$$\alpha = 7^{\text{h}} 33^{\text{m}} 15^{\text{s}}.6; \quad \delta = 31^{\circ} 56' 08''$$

num local de latitude $\phi = 41^{\circ} 06' 23''$.

53. Se H_1 e H_2 forem os ângulos horários de uma estrela de declinação δ , respectivamente na passagem no primeiro vertical a Oeste de um lugar de latitude ϕ e no momento do ocaso, mostre que:

$$\cos H_1 \cos H_2 + \operatorname{tg}^2 \delta = 0$$

54. Determine a latitude ϕ do lugar do hemisfério norte, em que uma estrela, que culmine no seu zénite, permanece visível durante $14^{\text{h}} 24^{\text{m}}$.

55. Determine a fracção do dia sideral em que uma estrela é visível, num local de latitude $\phi = 45^\circ$, sabendo que o seno da declinação da referida estrela é $1/\sqrt{3}$.

56. Num local de latitude $\phi = 55^\circ 45'$ uma estrela é visível durante 8^{h} . Determine um valor aproximado da declinação δ da estrela e do azimute A do seu ocaso.

57. Em 21 de Junho a declinação do Sol é aproximadamente $23^\circ 27'$. Determine um valor aproximado da latitude do lugar, sabendo que a duração do dia é de 3^{h} .

58. *Vega* e *Capella*, duas das estrelas mais brilhantes visíveis no hemisfério norte, têm ascensões rectas $18^{\text{h}} 36^{\text{m}}$ e $5^{\text{h}} 15^{\text{m}}$, respectivamente. O observador está situado à superfície da Terra, num local de longitude $\lambda = 15^\circ 25' W$.

a) Indique o intervalo de tempo sideral que decorre entre a culminação inferior de *Capella* e a culminação superior de *Vega*.

b) Obtenha o ângulo horário de *Capella* no instante da culminação superior de *Vega*.

59. Se z_1 e z_2 forem as distâncias zenitais duma estrela na sua culminação superior a sul do zénite e no primeiro vertical, respectivamente, mostre que:

$$\begin{aligned} \cotg \delta &= \operatorname{cosec} z_1 \sec z_2 - \cotg z_1 \\ \cotg \phi &= \cotg z_1 - \operatorname{cosec} z_1 \cos z_2 \end{aligned}$$

60. A distância zenital observada para a estrela β *Ursae Minoris* na sua culminação superior a norte do zénite foi $24^\circ 02' 08''$ e na culminação

inferior $53^{\circ} 51' 51''$. Determine a latitude ϕ do lugar de observação e a declinação δ da estrela, entrando em conta com o efeito da refração astronómica.

Condições locais: $P = 760 \text{ mm Hg}$; $t = 10^{\circ} \text{ C}$

Considere um modelo de atmosfera estratificada em camadas planas.

61. Qual é o efeito produzido pela refração no diâmetro visível do Sol, quando este está próximo do horizonte?

62. Qual é o efeito produzido pela refração no diâmetro visível da Lua, quando esta está próximo do horizonte?

63. Na passagem superior no meridiano (culminação superior) de um corpo celeste o valor encontrado para a distância zenital aparente, medida em condições normais de pressão e temperatura, num Observatório de latitude $\phi = 55^{\circ} 45' 20''$, foi $z = 47^{\circ} 59' 48''$. Determine a declinação δ do referido corpo, entrando em consideração com o efeito da refração.

64. A altura do limbo inferior do Sol no momento da sua culminação inferior, medida num barco, é $14^{\circ} 11' 05''$. A declinação do Sol nesse dia é $21^{\circ} 19' 34''$ e o seu raio angular $15' 47''$.

Determine um valor aproximado para a latitude correspondente à posição do barco, assumindo condições normais de temperatura e pressão.

65. Determine a época do ano para a qual o efeito da refração sobre a duração do dia, num local situado no equador terrestre, seja máximo. Entende-se por duração do dia o período entre o nascimento e ocaso do Sol. (Exame 99/00, Cruz e Caderot 2000; 5.5)

66. Determine as constantes A e B da expressão da refração: $R = A \operatorname{tg} z + B \operatorname{tg}^3 z$ sabendo que para a estrela α *Ursae Minoris* se fizeram as seguintes observações da distância zenital aparente, para as culminações superior a norte do zénite e inferior:

$$z_s = 49^\circ 02' 48''.14; z_i = 50^\circ 31' 02''.98$$

e que para a estrela γ *Cephei* nas duas culminações (considerando que a superior também se dá a norte do zénite) se obtiveram: $z_s = 37^\circ 24' 01''.63$; $z_i = 62^\circ 09' 32''.21$. As observações foram realizadas no Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, cuja latitude é $\phi = 40^\circ 11' 52''.57$.

67. A latitude do Observatório Astronómico do Porto, $\phi = 41^\circ 06' 23''$, foi determinada a partir da observação da distância zenital, na passagem superior meridiana, de duas estrelas com declinações: $\delta_1 = 30^\circ 16' 00''.0$; $\delta_2 = 52^\circ 06' 46''.0$

Considerando para este cálculo do valor da latitude o valor médio dos dois valores da latitude calculados a partir das duas estrelas, determine um valor aproximado do erro que viria a afectar aquele resultado de ϕ , caso não se atendesse ao efeito da refacção. As condições locais eram as seguintes: $P = 749 \text{ mm Hg}$; $t = 5^\circ \text{ C}$. Suponha que é usado um modelo de atmosfera estratificada em camadas planas.

68. Na culminação superior a sul do zénite de um dado corpo celeste, mediou-se a distância zenital aparente e obteve-se $z = 15^\circ 25' 35''$. A pressão e temperatura foram também registadas: $P = 730 \text{ mm Hg}$ e $t = 8^\circ \text{ C}$.

Mais tarde, quando o astro cruzou o primeiro vertical a Oeste, foi medida de novo a distância zenital aparente, tendo-se obtido $z = 47^\circ 25' 35''.12$.

Nesse instante a pressão era 750 mm Hg e a temperatura era 20° C .

Determine a declinação do corpo celeste e a latitude do lugar, tendo em consideração o efeito da refacção astronómica. NOTA: Considere um modelo de atmosfera estratificada em camadas planas.

69. A altura observada para um satélite artificial terrestre, no momento da sua culminação inferior, foi $25^\circ 35' 45''$. Nesse instante a sua declinação era $50^\circ 15' 15''$. Calcule a latitude do local de observação, tendo em conta o efeito da refacção. Considere condições normais de pressão e temperatura.

70. Numa época em que a paralaxe horizontal equatorial da Lua é $p = 57' 2''.7$, determine a distância Terra-Lua.

Considere o raio equatorial da Terra $a = 6378.140 \text{ Km}$.

71. O valor da paralaxe horizontal equatorial do Sol é $8''.80 \pm 0''.01$. Indique a precisão com que se pode determinar, a partir deste valor, a distância Terra-Sol.

72. Determine as paralaxes horizontais, equatorial e polar, de Vénus, numa época em que a sua distância à Terra é de 0.292 U.A. .

Considere os raios equatorial e polar da Terra iguais a 6378.140 Km e 6356.755 Km , respectivamente.

73. Sabendo que quando mais próximo da Terra a distância do planeta Vénus é de cerca de $4 \times 10^7 \text{ Km}$ e que então o seu raio angular é $32''.4$, calcule um valor aproximado para o diâmetro do planeta.

74. O raio equatorial médio da Lua é 0.27 vezes o raio equatorial médio da Terra. Supondo que a Terra e a Lua estão à mesma distância do Sol, determine a paralaxe equatorial horizontal do Sol, para um observador situado na Lua.

75. Sabendo que a paralaxe horizontal da Lua é $p = 59' 27''$, e que o seu raio angular é $\alpha = 16' 12''$, exprima o raio da Lua em Km.

Considere o raio equatorial da Terra $a = 6378.140 \text{ Km}$.

76. Mostre que a paralaxe horizontal equatorial do Sol pode ser obtida a partir da paralaxe horizontal equatorial de um planeta *superior*, em *oposição*, sendo conhecidas as distâncias médias do planeta ao Sol e da Terra ao Sol.

NOTA: Um planeta é denominado planeta *superior* se a sua órbita, em torno do Sol, tiver um raio superior ao raio da órbita da Terra. Diz-se que esse planeta está em *oposição* quando ele se encontra sobre a recta definida

pelas posições da Terra e do Sol, situando-se a Terra entre o referido planeta e o Sol.

77. Sabendo que o raio da Lua, considerada esférica, é 3.67 vezes inferior ao raio equatorial da Terra, determine a paralaxe horizontal equatorial da Lua, quando o seu raio angular é $\alpha = 15' 32''$.

78. Suponha que, num dado instante, a Terra, a Lua e o Sol se encontram alinhados por esta ordem. Qual a distância máxima entre a Lua e a Terra para que ocorra um eclipse total do Sol? Considere a Lua e o Sol corpos esféricos de raios, respectivamente 1738 Km e 697.000 Km, e a distância média Terra - Sol igual a 150.000.000 Km.

79. Calcule o dia Juliano correspondente a *1957 Outubro 4.81*, instante do lançamento do *Sputnik 1*.

80. O cometa *Halley* passou pelo periélio da sua órbita nos dias *20 de Abril de 1910* e *9 de Fevereiro de 1986*. Qual o número de dias que decorreram entre estas duas passagens pelo ponto da órbita mais próximo do Sol?

81. Calcule o dia da semana correspondente a *30 de Junho de 1954*.

82. Em *10h 30m* de tempo solar médio qual é o ganho de um relógio de tempo sideral relativamente a um relógio de tempo universal?

83. Mostre que a ascensão recta do Sol não aumenta uniformemente com a longitude. (Exame 97/98)

84. Calcule a longitude λ de um lugar, situado a este do meridiano de *Greenwich*, no qual, às *17^h 30^m* de tempo universal, o relógio de tempo sideral indicava *19^h 25^m 30^s.0*. Considere que nesse dia o tempo sideral médio em *Greenwich* às *0^h* de Tempo Universal era *1^h 34^m 5^s.9*.

85. O instante de ocorrência do nascimento de uma dada estrela, num Observatório de longitude *34^m 21^s.600 W*, foi registado, na manhã do dia *17 de Maio de 1982*, em dois relógios diferentes:

Relógio 1 - tempo sideral médio local $01^h 04^m$
 $45^s.800$

Relógio 2 - tempo universal $10^h 00^m 00^s.000$

O estado do segundo relógio é considerado nulo. Determine o estado do relógio 1.

NOTA: Determine o valor do tempo sideral médio em *Greenwich* às 0^h de tempo universal através da expressão:

$$TSMG_{0hTU} = 6^h 41^m 50^s.54841 + 8640184^s.812866T_U + \\ + 0^s.093104T_U^2 - 6^s.2 \times 10^{-6}T_U^3$$

em que T_U é o intervalo medido em séculos Julianos que vai desde 2000 *Janeiro 1*, às 12^h de tempo universal.

87. Determine a hora, em tempo universal, a que a estrela *Sirius*, no dia 20 de Maio de 1982, teve a sua culminação superior no meridiano de um Observatório de longitude $34^m 21^s.600$ W. Considere para a equação dos equinócios o valor de $-1^s.096$. Considere ainda para a estrela as coordenadas: $\alpha = 6^h 44^m 10^s.803$, $\delta = -16^\circ 41' 14'' .41$.

88. Determine o intervalo de tempo solar médio durante o qual a estrela *Sirius* de coordenadas:

$$\alpha = 06^h 44^m 18^s.858 \\ \delta = 16^\circ 41' 41'' .01$$

permanece visível à latitude de um Observatório Astronómico que tem como coordenadas terrestres:

$$\lambda = 00^h 34^m 21^s.600 \\ \phi = 41^\circ 06' 23'' .00$$

89. Determine a ascensão recta α das estrelas que no dia 22 de Maio de 1982, às 21^h de TU, tiveram passagem superior no meridiano de um

Observatório de longitude $34^m 21^s.600 W$. Considere para a equação dos equinócios o valor de $-1^s.096$

90. Observou-se a estrela *Algol* (β *Persei*) em Coimbra ($\phi = 40^\circ 11' 53''$ e $\lambda = 33^m 46^s.47$) no dia 21 de Janeiro de 1998. Sabe-se que nesse dia as coordenadas da estrela eram $\delta = 40^\circ 56' 43''.20$ e $\alpha = 3^h 7^m 59^s.65$.

a) Calcule o ângulo horário e a distância zenital correspondentes ao instante em que ocorreu a maior digressão a Ocidente desta estrela.

b) Obtenha o ângulo horário da estrela no instante da sua passagem no primeiro vertical a este.

c) Determine para esse dia o período de tempo durante o qual esta estrela é visível.

d) Calcule o Tempo Universal correspondente ao instante em que a estrela teve nesse dia culminação inferior em Coimbra. Considere que a equação dos equinócios toma o valor de $-1^s.085$ e que o tempo sideral médio em *Greenwich* às 0^h de T.U. é nesse dia $4^h 53^m 5^s.9$. NOTA: 24^h de tempo sideral médio correspondem a $23^h 56^m 4^s.091$ de tempo solar médio. (Exame 97/98)

91. Calcule o instante, em tempo universal, a que a estrela *Aldebaran* (α *Tauri*), no dia 13 de Março de 1996, teve culminação inferior, num local de longitude $33^m 46^s.47 W$. Considere para a equação dos equinócios o valor $-1^s.68$, para a ascensão recta da estrela $4^h 35^m 42^s.31$ e para o tempo sideral médio em *Greenwich* às 0^h de TU o valor $11^h 23^m 36^s.86$. NOTA: 24^h de tempo sideral médio correspondem a $23^h 56^m 4^s.091$ de tempo solar médio.

92. Em *Lisboa* ($\phi = 38^\circ 42' 30''.5 N$; $\lambda = 9^\circ 11' 10''.2 W$) observou-se a estrela *Sirius* a uma altura de $25^\circ 55' 33''$. Sabe-se ainda que as coordenadas da estrela são $\alpha = 6^h 44^m 30^s.6$ e $\delta = -16^\circ 41' 44''$.

- a) Determine o ângulo horário no momento da observação. Considere que a observação foi feita pouco tempo depois da culminação superior da estrela.
- b) Calcule o tempo sideral aparente em *Greenwich* no instante da observação.
- c) Determine a fracção do dia durante a qual esta estrela permanece visível.
- d) Calcule a altura da estrela no instante da sua passagem no primeiro vertical, a Oeste.
- e) Qual seria o ângulo horário se a estrela fosse observada à mesma altura $h = 25^{\circ} 55' 33''$, mas agora próxima da sua culminação inferior?

93. Em *Coimbra* observou-se a estrela β *Orionis* cujas coordenadas são $\alpha = 5^h 14^m 25^s .35$ e $\delta = -8^{\circ} 12' 13'' .34$. Calcular o Tempo Universal correspondente ao instante em que ocorre nesse dia, em *Coimbra*, a culminação superior desta estrela. Considere que a equação dos equinócios tem o valor de $-2^s .02$ e que às 0^h de T.U. são $15^h 49^m 18^s .48$ de Tempo Sideral Médio em *Greenwich*. (Exame 99/00)

94. Construa um programa informático (numa linguagem à sua escolha) para a determinação das posições observadas de uma estrela (altura e azimute) supondo conhecidos os seguintes parâmetros:

- Data de observação (hora em TU, dia, mês e ano)
- Local da observação (latitude e longitude geográfica)
- Coordenadas equatoriais uranográficas

Bibliografia (BP – principal; BS – secundária)

- ✓ BP: Cruz, A.; Caderot, M., “Problemas resueltos de Astronomia”. Ed.: Sirius (2000)
- ✓ BP: Freedman & Kaufmann, “Universe”. Ed.: W.H. Freeman (2005)
- ✓ BP: Gates, M., “Stellarium - versão 0.12.4”, documento de suporte ao software¹⁹ (2013)
- ✓ BP: Hoskin, M., “The Cambridge Concise History of Astronomy”. Ed.: Cambridge UP (1999)
- ✓ BP: Mackie, J. B., “The Elements of Astronomy for Surveyors”. Ed.: London: Charles Griffin (1982)
- ✓ BP: Green, R., “Spherical Astronomy”. Ed.: Cambridge UP (1985)
- BS: Casaca, J; Matos, J.; Baio, M., Topografia Geral, Ed.: Lidel (2005)
- BS: Gilder, J.; Gilder, A-L., “Heavenly Intrigue: Johannes Kepler, Tycho Brahe, and the Murder Behind One of History's Greatest Scientific Discoveries”. Ed.: Random House CA (2005)
- BS: Gingerich, O., “Truth in Science: Proof, Persuasion, and the Galileo Affair”, Perspectives on Science and Christian Faith, Volume 55, Number 2, p.80 (2003)
- BS: Leitão, H., “Sphaera Mundi: A Ciência na Aula da Esfera”. Ed.: Biblioteca Nacional (2008)
- BS: Palmieri, P., “Galileo and the discovery of the phases of Venus”, Journal for the History of Astronomy, Vol. 32, Part 2, No. 107, p. 109 (2001)
- BS: Perryman, M. A. C. et al., “Parallaxes and the Hertzsprung-

¹⁹ http://www.stellarium.org/wiki/index.php/Stellarium_User_Guide

Russell diagram for the preliminary HIPPARCOS solution H30”,
Astronomy and Astrophysics, Vol. 304, p. 69 (1995)

- BS: Wielen, R.; Schwan, H.; Dettbarn, C.; Lenhardt, H.; Jahreiß, H.; Jährling, R.; Khalisi, E., “Sixth Catalogue of Fundamental Stars (FK6). Part III. Additional fundamental stars with direct solutions”, Veröffentlichungen Astronomisches Rechen-Institut Heidelberg, Verlag G. Braun, Karlsruhe, No. 37, p. 1 (2000)